Exercice 2 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Suites - Fonctions

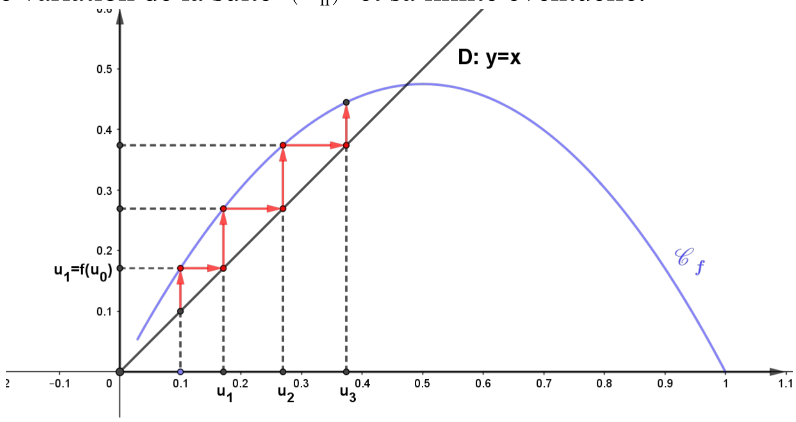
Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}9\,u_n(1-u_n)$.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes. On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Partie 1

Dans cette partie, $k=1{,}9$ et $u_0=0{,}1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}9\,u_n(1-u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur [0;1] par $f(x)=1{,}9x(1-x)$.
1.a. Étudier les variations de f sur l'intervalle [0;1].
1.b. En déduire que si $x\in[0;1]$ alors $f(x)\in[0;1]$.

2. Ci-dessous, sont représentés, les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y=x$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3.a. En utilisant les résultats de la question 1 ; démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}.$$
3.b. En déduire que la suite (u_n) converge.
3.c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k=\frac{1}{2}$ et $u_0=\frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n(1-u_n)$ et $u_0=\frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0\leqslant u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. On considère la fonction Python algo(p) où p désigne un entier naturel non nul.

```
def algo(p):
  u=1/4
  n=0
  while u>10**(-p):
    u=1/2*u*(1-u)
    n=n+1
  return n
```

Expliquer, pourquoi, pour tout entier naturel non nul p, la boucle while ne tourne pas indéfiniment ce qui permet à la commande algo(p) de renvoyer une valeur.

CORRECTION

1.a. $x \in [0;1]$ $\quad f(x)=1,9x(1-x)$

$f(x)=-1,9x^2+1,9x$

f est dérivable sur [0;1].

$f'(x)=-2\times 1,9x+1,9$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\times 1,9x=1,9 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}=0,5$

$f'(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\times 1,9x>-1,9 \quad \Leftrightarrow \quad 0\leqslant x<0,5$

$f'(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\times 1,9x<-1,9 \quad \Leftrightarrow \quad 1\geqslant x>0,5$

$f(0)=0$ et $f(1)=0$ et $f(0,5)=-1,9\times 0,5\times 0,5+1,9\times 0,5=1,9\times 0,25=0,475$

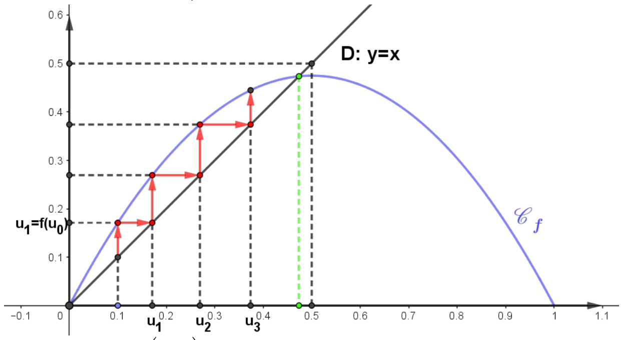
Tableau de variation de f

x	0		0.5		1
f '(x)		+	0	–	
f(x)	0	↗	0.475	↘	0

1.b. Le maximum de f(x) sur [0;1] est 0,475 et le minimum de f(x) sur [0;1] est 0.

Donc si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $0\leqslant f(x)\leqslant 0,475\leqslant 1$ et si $x\in[0;1]$ alors $f(x)\in[0;1]$.

2. On remarque que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.



La suite (u_n) est croissante et la suite (u_n) converge vers l'abscisse (ou l'ordonnée) du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite D.

Par lecture graphique, on obtient pour limite de la suite (u_n) : 4,7 ou 4,8.

3.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$.

<u>Initialisation</u>

$u_0=\frac{1}{4}=0,25$, $\quad u_1=f\left(\frac{1}{4}\right)=1,9\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{5,7}{16}\simeq 0,36\leqslant\frac{1}{2}$

donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant\frac{1}{2}$ et la propriété est vérifiée pour n=0.

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$

et on doit démontrer que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\frac{1}{2}$.

Si $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$ alors $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant\frac{1}{2}$ car f est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

$f(0)=0$, $f(u_n)=u_{n+1}$, $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}475\leqslant\frac{1}{2}$

donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\frac{1}{2}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$.

3.b. Pour tout entier naturel n : $u_n\leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_n\leqslant\frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) converge.

3.c. Pour tout entier naturel n $f(u_n)=u_{n+1}$.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=L$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=f(L)$ et L=f(L).

On résout l'équation $f(x)=x$.

$1{,}9x(1-x)=x \Leftrightarrow x(1{,}9-1{,}9x-1)=0 \Leftrightarrow x(0{,}9-1{,}9x)=0 \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ou } x=\frac{9}{19}\simeq 0{,}474\right)$.

$u_0=\frac{1}{4}$ et (u_n) est une suite croissante donc $\frac{1}{4}\leqslant L$ et $L\neq 0$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{9}{19}$.

Partie 2

1. $0\leqslant\frac{1}{2}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

Pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.

Donc la suite (u_n) converge vers 0.

2. La suite (u_n) converge vers 0, donc pour tout entier naturel non nul p, il existe un entier naturel N tel que si $n\geqslant N$ alors $u_n\leqslant 10^{-p}$ la boucle while ne tourne pas indéfiniment, elle s'arrête pour N.

