Exercice 3 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Fonctions

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{2\ln(x)}{x}$.

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x, strictement positif : $g'(x)=\frac{2-2\ln(x)}{x^2}$.

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		1		e		+∞
Variations de g	‖				$\frac{e}{2}$		
	‖	↗	0	↗		↘	
	‖ -∞						0

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau.

2.a. la valeur $\frac{2}{e}$

2.b. les variations de la fonction g sur son ensemble de définition

2.c. les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=[\ln(x)]^2$.
Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. À l'aide de la partie 1 , étudier :

2.a. la convexité de la fonction f.

2.b. les variations de la fonction f.

3.a. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

3.b. En déduire que, pour tout réel x dans l'intervalle $]0;e]$: $[\ln(x)]^2\geqslant\frac{2}{e}x-1$.

CORRECTION

1. $x\in]0;+\infty[$ $\quad g(x)=\frac{2\ln(x)}{x}$.

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$ $\quad u(x)=2\ln(x)$ $\quad u'(x)=\frac{2}{x}$ $\quad v(x)=x$ $\quad v'(x)=1$

$u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)=\frac{2}{x}\times x-2\ln(x)\times 1=2-2\ln(x)$.

$g'(x)=\frac{2-2\ln(x)}{x^2}$

2.a. $g(e)=\frac{2\ln(e)}{e}=\frac{2\times 1}{e}=\frac{2}{e}$

2.b. Le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe de $2-2\ln(2)$ car $x^2>0$.

$2-2\ln(x)=0 \Leftrightarrow 2=2\ln(x) \Leftrightarrow 1=\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e)=\ln(x) \Leftrightarrow e=x$

$2-2\ln(x)>0 \Leftrightarrow 2>2\ln(x) \Leftrightarrow 1>\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e)>\ln(x) \Leftrightarrow e>x>0$

car $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$2-2\ln(x)<0 \Leftrightarrow 2<2\ln(x) \Leftrightarrow 1<\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e)<\ln(x) \Leftrightarrow e<x$

g est strictement croissante sur $]0;e]$ et g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

2.c. $x\in]0;+\infty[$ $\quad g(x)=2\times\frac{\ln(x)}{x}$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ (résultat de cours) donc $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

$x\in]0;+\infty[$ $\quad g(x)=\frac{2}{x}\times\ln(x)$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{2}{x}=+\infty$ $\quad \lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$.

3. $g(1)=0$ et g est strictement croissante sur $]0;e]$ donc :

Si $0<x<1$ alors $g(x)<g(1)=0$

Si $1<x\leqslant e$ alors $0=g(1)<g(x)$

g est strictement décroissante sur $[e;+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ donc g est positive sur $[e;+\infty[$.

Tableau de signes de g

x	0		1		$+\infty$
g(x)	||	−	0	+	

Partie 2

1. Pour démontrer que f est une primitive de g sur $]0+\infty[$, il suffit de démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ $\quad f'(x)=g(x)$;

$f(x)=[\ln(x)]^2$

$(u^2)'=2\times u\times u'$ $\quad u(x)=\ln(x)$ $\quad u'(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=2\ln(x)\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln(x)}{x}=g(x)$

2.a. Pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f''(x)=g'(x)$.

x	0		e		$+\infty$
f "(x)	||	+	0	−	
convexité de f	||	f est convexe		f est concave	

$f(e)=1$ donc le point $E(e;1)$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2.b. $f'(x)=g(x)$ donc :

$f'(x)\leqslant 0$ sur $]0;1]$ et f est décroissante sur $]0;1]$

$f'(x)\geqslant 0$ sur $[1;+\infty[$ et f est croissante sur $[1;+\infty[$

3.a. E est le point de la courbe représentative de f d'abscisse e.

$f(e)=1 \qquad f'(e)=g(e)=\frac{2}{e}$

(T) est la tangente à la courbe représentative de f au point E.

(T) : $y-f(1)=f'(e)(x-e) \Leftrightarrow y-1=\frac{2}{e}(x-e) \Leftrightarrow y=\frac{2}{e}x-1$

3.b. La fonction f est convexe sur l'intervalle]0;e] donc la partie de la courbe représentative de f sur]0;e] est au dessus de la tangente à cette courbe au point E.

Donc pour tout $x\in]0;e]$ le point $M(x;f(x))$ est au dessus du point $P\left(x;\frac{2}{e}x-1\right)$ de (T),

c'est à dire $f(x)\geqslant\frac{2}{e}x-1 \Leftrightarrow [\ln(x)]^2\geqslant\frac{2}{e}x-1$