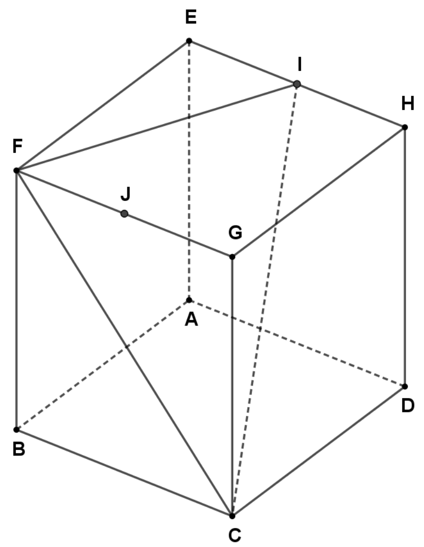
Exercice 4 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géomérie du plan et de l'espace

On considère le cube ABCDEFGH.
On note I le milieu du segment [EH] et on considère le triangle CFI.
L'espace est muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ dans ce repère.



1.a. Donner sans justifier les coordonnés des points C ; F et G.

1.b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CFI).

1.c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).
2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2.b. Démontrer que le point $K\left(\frac{7}{9};\frac{5}{9};\frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

2.c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI.

On rappelle que le volume V *d'une pyramide est donné par la formule* $V=\frac{1}{2}\times b\times h$ *où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.*

3.a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

2.b. En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.

CORRECTION

1.a. $C(1;1,0)$; $F(1;0;1)$; $G(1;1;1)$

1.b. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (CFI) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (CFI).

$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CI}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{n}.\overrightarrow{CF}=1\times 0+0\times(-1)+2\times 1=-2+2=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{CI}=1+2\times\frac{1}{2}+2\times(-1)=1+1-2=0$.

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (CFI).

1.c. $M(x;y;z)$ $\quad \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$M\in(CFI) \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{CM}=0 \Leftrightarrow 1\times(x-1)+2\times(y-1)+2\times(z-0)=0$

$\Leftrightarrow x-1+2y-2+2z=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-3=0$

2.a. d est la droite passant par $G(1;1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{n}$.

$M(x;y;z)$ $\quad \overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$M\in d \Leftrightarrow$ il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{GM}=t.\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=t\\y-1=2t\\z-1=2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x=t+1\\y=2t+1\\z=2t+1\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

2.b. Le projeté orthogonal de G sur le plan (CFI) est le point d'intersection de la droite d et du plan (CFI).
On résout le système :

$\begin{cases}x+2y+2z-3=0\\x=t+1\\y=2t+1\\z=2t+1\end{cases}$ on obtient : $t+1+2\times(2t+1)+2\times(2t+1)-3=0 \Leftrightarrow t+1+4t+2+4t+2-3=0$

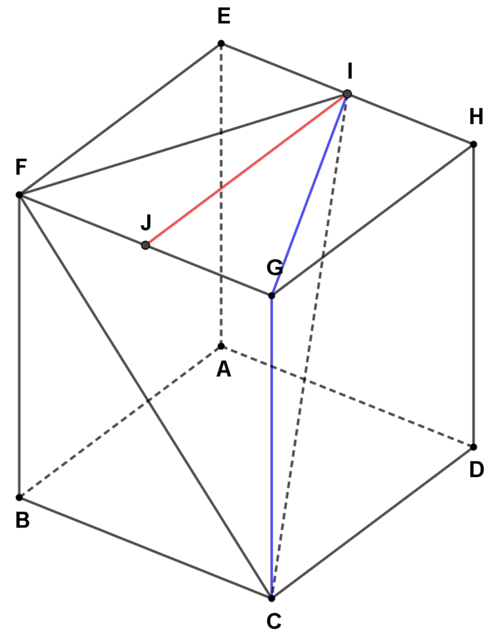
$\Leftrightarrow 9t=-2 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{9}$

$x=-\frac{2}{9}+1=\frac{7}{9}$ $\quad y=-\frac{4}{9}+1=\frac{5}{9}$ $\quad z=-\frac{4}{9}+1=\frac{5}{9}$ $\quad K\left(\frac{7}{9};\frac{5}{9};\frac{5}{9}\right)$.

2.c. $GK^2=\left(\frac{7}{9}-1\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2=\frac{4+16+16}{81}=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$ $\quad GK=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$.

La distance du point G au plan (CFI) est égale à $GK=\frac{2}{3}$.

3.a. On considère la pyramide GCFI de base FIG et de hauteur associée CG=1



Le triangle FIG est le triangle de base $FG=1$ et de hauteur $IJ=1$ (J est le milieu de [FG])

$b=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$ (en unité d'aire) $h=CG=1$

$V=\frac{1}{3}\times b\times h$ $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{6}$ (en unité de volume).

3.b. On considère la pyramide GCFI de base CFI et de hauteur associée $GK=\frac{2}{3}$.

$V=\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times b\times\frac{2}{3} \Leftrightarrow b=\frac{3\times 3}{6\times 2}=\frac{3}{4}$

L'aire du triangle CFI est égale $\frac{3}{4}$ (en unité d'aire).