Exercice 1 — 5 points

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :
- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :
- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

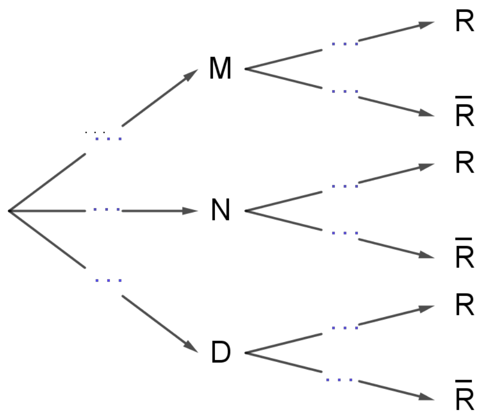
Les parties A et B sont indépendantes peuvent-être traitées séparément.

Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet.
On considère les événements suivants :
- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
- D : « Le déchet est dangereux » ;
- R : « Le déchet est recyclable ».

On note $\bar{R}$ l'événement contraire de l'événement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.

3. Déterminer la probabilité $P(M\cap\bar{R})$ et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de R est $P(R)=0{,}6514$.

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit minéral et non dangereux.
On donnera la valeur arrondie au dix-millième.

Partie B

On rappelle que probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,0105.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production.
On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire égale on nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

1.a. On admet que la variable aléatoire X soit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

1.b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables.
On donnera la valeur arrondie au dix-millième.

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets où n est un entier naturel strictement positif.

2.a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun de cet échantillon ne soit recyclable.

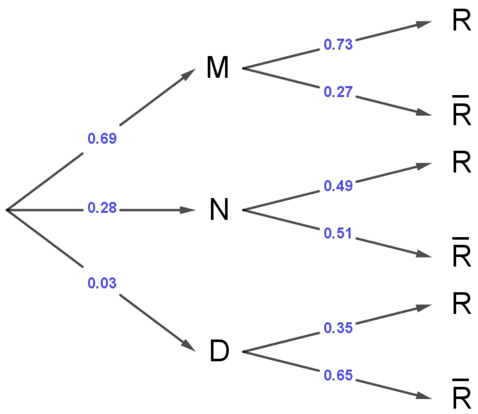
2.b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

CORRECTION

Partie A

1. 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux donc : $P(M)=0{,}69$.

- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux donc : $P(N)=0{,}28$.
- Les déchets restants sont des déchets dangereux donc : $P(D)=1-P(M)-P(N)=1-0{,}69-0{,}28=0{,}03$.
- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables donc :
  $P_M(R)=0{,}73$ et $P_M(\bar{R})=1-P_M(R)=1-0{,}73=0{,}27$.
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables donc :
  $P_N(R)=0{,}49$ et $P_N(\bar{R})=1-P_N(R)=1-0{,}49=0{,}51$.
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables donc :
  $P_D(R)=0{,}35$ et $P_D(\bar{R})=1-P_D(R)=1-0{,}35=0{,}65$.
- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(D\cap R)=P(D)\times P_D(R)=0{,}03\times 0{,}35=0{,}0105$

3. $P(M\cap \bar{R})=P(M)\times P_M(\bar{R})=0{,}69\times 0{,}27=0{,}1863$
18,63 % des déchets sont des déchets minéraux et non recyclables.

4. Les événements M, N et D forment une partition de l'ensemble des déchets.
En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(R)=P(M\cap R)+P(N\cap R)+P(D\cap R)$
$P(R)=P(M)\times P_M(R)+P(N)\times P_N(R)+P(D)\times P_D(R)$
$P(R)=0{,}69\times 0{,}73+0{,}28\times 0{,}49+0{,}0105$
$P(R)=0{,}5037+0{,}1372+0{,}0105=0{,}6514$

5. On nous demande de calculer $P_R(N)$.
$P_R(N)=\dfrac{P(N\cap R)}{P(R)}=\dfrac{0{,}1372}{0{,}6514}=0{,}2106$ (valeur arrondie au dix-millième)

Partie B

1.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On tire au hasard un déchet ;
Succès S : « le déchet est recyclable » $P(S)=P(R)=0{,}6514$
Échec $\bar{S}$: « le déchet n'est pas recyclable » $P(\bar{S})=P(\bar{R})=0{,}3586$
On effectue 20 tirages indépendants avec remise.
X est la variable égale au nombre de succès 20 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0{,}6514$.

1.b. La probabilité d'avoir exactement 14 déchets recyclables est égale à :

$\binom{20}{14}\ 0{,}6514^{14}\times 0{,}3486^{6}\simeq 0{,}1723$ (valeur arrondie au dix-millième).

2.a. On prélève n déchets (n entier naturel non nul).
Soit l'événement A : « aucun déchet de ce prélèvement ne soit recyclable »
c'est à dire les n déchets sont non recyclables.

$P(A)=p_n=0{,}3486^n$.

2.b. $\bar{A}$ est l'événement : « au moins un déchet du prélèvement est recyclable ».

$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}3486^n$.

$1-0{,}3486^n\geqslant 0{,}9999 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}0001\geqslant 0{,}3486^n$

$\ln$ est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\Leftrightarrow\quad \ln(0{,}0001)\geqslant\ln(0{,}3486^n) \quad\Leftrightarrow\quad \ln(0{,}0001)\geqslant n\times\ln(0{,}3486)$

$0<0{,}3486<1$ donc $\ln(0{,}3486)<0$

$\Leftrightarrow\quad \dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}3486)}\leqslant n$

$\dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}3486)}\simeq 8{,}73$ et n est un entier naturel.

$\Leftrightarrow\quad 9\leqslant n$

La probabilité, qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable, est supérieure à $0{,}9999$ à partir d'un prélèvement de 9 déchets.