Exercice 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{3x}-(2x+1)e^{x}$.
Le but de de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire
On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=3e^{2}x-2x-3$.

1.a. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.
1.b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2.a. On admet que la fonction g est dérivable, et on note g' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout de nombre réel x, on a : $g'(x)=6e^{2x}-2$.
2.b. Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.
2.c. En déduire le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3)-2$.

3.a. Montrer que $x=0$ est une solution de l'équation $g(x)=0$.
3.b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α ,
dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1} .

4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x)=e^{x}g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A.**

2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f.

3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x, $g(x)=3e^{2x}-2x-3$.

1.a. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

1.b. Pour $x>0$ $g(x)=2x\left(3\times\frac{e^{2x}}{2x}-1\right)-3$

$\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\times\frac{e^{2x}}{2x}-1\right)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$ on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\times\frac{e^{2x}}{2x}-1\right)=+\infty$.

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2.a. $(e^u)'=u'\times e^u$ donc $(e^{2x})'=2e^{2x}$

$g'(x)=3\times(2e^{2x}-2)=6e^{2x}-2$

2.b. $g'(x)=0 \Leftrightarrow 6e^{2x}-2=0 \Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x=\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\ln(3)$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow 6e^{2x}-2>0 \Leftrightarrow 6e^{2x}>2 \Leftrightarrow e^{2x}>\frac{1}{3}$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$;

$\Leftrightarrow \ln(e^{2x})>\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 2x>-\ln(3) \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}\ln(3)$

de même $g'(x)<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

On donne le résultat sous la forme d'un tableau

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}ln(3)$		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	

2.c. Tableau de variation de g

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}ln(3)$		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

Le minimum de g est :

$m=g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right)=3\times e^{-\ln(3)}+\ln(3)-3=3\times e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}+\ln(3)-3=3\times\frac{1}{3}+\ln(3)-3=\ln(3)-2$.

3.a. $g(0)=3\times e^0-0-3=3-3=0$

3.b. $\ln(3)-2<0$ et $-\frac{1}{2}\ln(3)<0$

g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\ln(3)\right]$ à valeurs dans l'intervalle $[\ln(3)-2;+\infty[$, 0 appartient à l'intervalle $[\ln(3)-2;+\infty[$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\ln(3)\right]$.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $-1{,}5<\alpha<-1{,}4$.

4. g est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\ln(3)\right]$ donc :

si $x<\alpha$ alors $g(x)>g(\alpha)=0$

si $\alpha<x\leqslant-\frac{1}{2}\ln(3)$ alors $g(\alpha)=0>g(x)$.

g est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}\ln(3);+\infty\right[$ donc :

si $-\frac{1}{2}\ln(3)\leqslant x<\alpha$ alors $g(x)<g(\alpha)=0$

si $\alpha<x$ alors $g(\alpha)=0<g(x)$.

On donne le résultat sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}ln(3)$		0		$+\infty$
g(x)		+	0	−	0	+	

Partie B

1. $f(x)=e^{3x}-(2x+1)e^{x}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=3e^{3x}-2e^{x}-(2x+1)e^{x}$

$f'(x)=3e^{3x}-(2x+3)e^{x}$

$f'(x)=e^{x}(3e^{2x}-2x-3)=e^{x}g(x)$.

2. Pour tout nombre réel x, $e^{x}>0$, donc le signe de $f'(x)$ est le sig ne de $g(x)$.

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}ln(3)$		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	M	↘	0	↗	

$f(0)=3e^{0}-(2\times0+1)e^{0}=3-3=0$. Il n'est pas nécessaire de donner la valeur exacte de M.

3. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}\ln(3)$ est la droite d'équation $x=M$.

D'après les variations de f on peut affirmer : $M>0$.

Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 (l'origine du repère) est en dessous de cette tangente donc f n'est pas convexe.