Exercice 4 — 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{11}{u_n}\right)$.

On admet que (u_n) est bien définie.

Partie A – Étude la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{11}{x}\right)$.

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{11};+\infty[$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On notera α cette limite.

5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont α est solution, préciser la valeur exacte de α.

Partie B – Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée l_n et la longueur L_n.

La suite (L_n) est définie par $L_0=5$ et, pour tout entier naturel n, $L_{n+1}=\frac{L_n+l_n}{2}$.

1.a. Expliquer pourquoi $l_0=2{,}2$.

1.b. Établir que pour tout entier naturel n, $l_n=\frac{11}{L_n}$.

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de **la partie A.**

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $l_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.

4. On admet que les suites (L_n) et (l_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$.
Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de **la partie B.**

5. Voici un script, en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
    L=5
    l=2.2
    for i in range(n):
        L=(L+l)/2
        l=11/L
    return round(l,6), roound(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python round(x,k) renvoie une valeur arrondie du nombre x avec k décimales.

5.a. Si l'utilisateur tape heron(3) dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeur de sortie pour l et L ?

5.b. Donner une expression de ces valeurs.

CORRECTION

Partie A

1. $u_0=5$ $\quad u_1=\frac{1}{2}\left(u_0+\frac{11}{u_0}\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{11}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{25+11}{5}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{36}{5}=\frac{18}{5}$ $\quad u_1=\frac{18}{5}$

$u_2=\frac{1}{2}(u_1+\frac{11}{u_1})=\frac{1}{2}\left(\frac{18}{5}+11\times\frac{5}{18}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{18}{5}+\frac{55}{18}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{924+275}{90}=\frac{599}{180}$ $\quad u_2=\frac{599}{180}$

2. f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\left(\frac{11}{x}\right)'=-\frac{11}{x^2}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{11}{x^2}\right)=\frac{x^2-11}{2x^2}$ $\quad f'(x)=\frac{(x-\sqrt{11})(x+\sqrt{11})}{2x^2}$.

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a $\frac{x+\sqrt{11}}{x^2}>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe de $x-\sqrt{11}$.

Si $0<x<\sqrt{11}$ alors $f'(x)<0$.

Si $\sqrt{11}\leqslant x$ alors $f'(x)>0$.

f est croissante sur $[\sqrt{11};+\infty[$.

3. Pour tout entier naturel n, on a $f(u_n)=u_{n+1}$.

On a aussi $f(\sqrt{11})=\frac{1}{2}\left(\sqrt{11}+\frac{11}{\sqrt{11}}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{11+11}{\sqrt{11}}=\frac{11}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}$.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\sqrt{11}$.

Initialisation

$u_0=5$ $\quad u_1=\frac{18}{5}=3{,}6$ $\quad \sqrt{11}\simeq 3{,}32$ $\quad$ donc $u_0\geqslant u_1\geqslant\sqrt{11}$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\sqrt{11}$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\geqslant u_{n+2}\geqslant\sqrt{11}$.

Or si $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\sqrt{11}$, sachant que f est croissante sur $[\sqrt{11};+\infty[$, alors $f(u_n)\geqslant f(u_{n+1})\geqslant f(\sqrt{11})$.

On a $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(\sqrt{11})=\sqrt{11}$ donc $u_{n+1}\geqslant u_{n+2}\geqslant\sqrt{11}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\sqrt{11}$.

4. Pour tout entier naturel n $u_n\geqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est décroissante et pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant\sqrt{11}$ donc la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{11}$.

Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.

5. f est continue sur $]0;+\infty[$ et pour tout entier naturel n, on a $f(u_n)=u_{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(\alpha)$ et $\alpha=f(\alpha)$.

α est une solution de l'équation $x=f(x)$ $\Leftrightarrow$ $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{11}{x}\right)$ $\Leftrightarrow$ $2x=x+\frac{11}{x}$ $\Leftrightarrow$ $x=\frac{11}{x}$

$\Leftrightarrow$ $x^2=11$ $\Leftrightarrow$ $(x-\sqrt{11})(x+\sqrt{11})=0$;

$x\in]0;+\infty[$ donc $x=\sqrt{11}$ et $\alpha=\sqrt{11}$.

Partie B

1.a. L'aire de R_0 est égale à 11 (en unité d'aire).

$11=L_0\times l_0 \Leftrightarrow 11=5\times l_0 \Leftrightarrow l_0=\frac{11}{5}=2{,}2$.

1.b. Pour tout entier naturel n, l'aire de R_n est égale à 11 (en unité d'aire).

Donc $L_n\times l_n=11$ et $l_n=\frac{11}{L_n}$.

$L_0=5$ et pour tout entier naturel n, $L_{n+1}=\frac{L_n+l_n}{2}=\frac{1}{2}\left(L_n+\frac{11}{L_n}\right)$.

2. La suite (u_n) de la partie A est définie par $u_0=5$ et la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{11}{u_n}\right)$.

Les deux suites (L_n) et (u_n) ont le même premier terme et vérifie la même relation de récurrence donc pour tout entier naturel n $L_n=u_n$.

3. La suite (u_n) est minorée par $\sqrt{11}$ donc pour tout entier naturel n, $\sqrt{11}\leqslant L_n$.

La fonction inverse et décroissante sur $]0;+\infty[$ donc $\frac{1}{\sqrt{11}}\geqslant\frac{1}{L_n}$.

$11>0$ on obtient $\frac{11}{\sqrt{11}}\geqslant\frac{11}{L_n} \Leftrightarrow \sqrt{11}\geqslant\frac{1}{L_n}=l_n$

Conséquence : $l_n\leqslant\sqrt{11}\leqslant L_n$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{11}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n=\lim\limits_{n\to+\infty} l_n=\sqrt{11}$.

La limite du rectangle R_n est le carré de côté $\sqrt{11}$.

5.a. On obtient la valeur arrondie à 6 décimales de $L_3=u_3$ et de $l_3=\frac{11}{u_3}$.

5.b. Pour heron(1)

$L_1=u_1=\frac{18}{5}=3{,}6 \qquad l_1=\frac{11}{u_1}=\frac{55}{18}\simeq 3{,}055556$.

Pour heron(2)

$L_2=u_2=\frac{599}{180}\simeq 3{,}327778$

$l_2=\frac{11}{u_2}=\frac{180}{599}\times 11\simeq 3{,}305509$.

Pour heron(3)

$L_3=u_3=\frac{715201}{215640}\simeq 3{,}316643$

$l_3=\frac{11}{u_3}=\frac{215640}{715201}\times 11\simeq 3{,}316606$

Pour information, la valeur arrondie à 6 décimales de $\sqrt{11}$ est : 3,316625.

