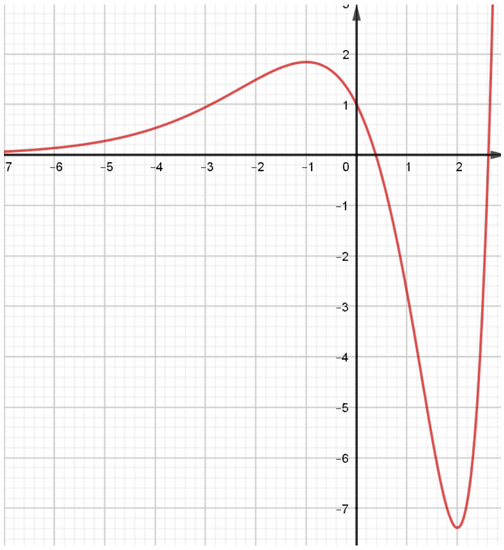
Exercice 1 5 points

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Dans cette partie les résultats sont obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'. Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.

2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-5x+6)e^x$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1.a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
1.b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. montrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x)=(x^2-3x+1)e^x$.

3. En déduire l'équation réduite de la tangente ($\mathscr{T}$) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de f.
On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x)=(x+1)(x-2)e^x$.

5.a. Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5.b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle [-1;2], on a : $f(x)\leqslant x+6$.

CORRECTION

Partie A

1. Sur $]-\infty;0{,}4]$, $f'(x)\geqslant 0$ donc f est croissante sur $]-\infty;0{,}4]$.
Sur $[0{,}4;2{,}6]$, $f'(x)\leqslant 0$ donc f est décroissante sur [0,4;2,6].
Sur $[2{,}6;+\infty[$, $f'(x)\geqslant 0$ donc f est croissante sur $[2{,}6;+\infty[$.

2. Sur $]-\infty;-1]$, f' est croissante donc f est convexe sur $]-\infty;-1]$.
Sur $[-1;2]$, f' est décroissante donc f est concave sur $[-1;2]$.
Sur $[2;+\infty[$, f' est croissante donc f est convexe sur $[2;+\infty[$.

Partie B

1.a. $f(x)=(x^2-5x+6)e^x$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-5x+6)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

1.b. $f(x)=x^2e^x-5xe^x+6e^x$ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

2. Pour tout nombre réel x, $f(x)=(x^2-5x+6)e^x$.
$(e^x)'=e^x$ $(x^2-5x+6)'=2x-5$ On dérive un produit.
$f'(x)=(2x-5)e^x+(x^2-5x+6)e^x=(2x-5+x^2-5x+6)e^x$
$f'(x)=(x^2-3x+1)e^x$

3. Pour tout nombre réel x, $e^x>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme x^2-3x+1.
$\Delta=(-3)^2-4\times1\times1=5$ $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ $x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Le coefficient de x^2 est positif.
On donne le signe de $f'(x)$ et les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

4. $f(0)=6$ et $f'(0)=1$
$(\mathscr{T})$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées (0;6).
$(\mathscr{T})$: $y-6=1\times(x-0)$ $(\mathscr{T})$: y=x+6

5.a. Pour tout nombre réel x, $f''(x)=(x+1)(x-2)e^x$.
Le signe de $f''(x)$ est le signe de $(x+1)(x-2)$;

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f''(x)		+	0	−	0	+	
f		f est convexe		f est concave		f est convexe	

5.b. La fonction f est concave sur [-1;2] donc $\mathscr{C}$ est en dessous de toutes ses tangentes sur [-1;2].
0 appartient à [-1;2] donc $\mathscr{C}$ est en dessous de $(\mathscr{T})$: y=x+6 sur [-1;2].
pour tout x de l'intervalle [-1;2], $f(x)\leqslant x+6$.