Exercice 2 — 5 points

On étudie un groupe de 3000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023 le club A compte 1700 membres et le club B en compte 1300.
On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0=1700$ et $b_0=1300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :
. durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
. chaque année 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
. chaque année 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres des membres de chaque club en 2024.

2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n : $a_{n+1}=0{,}75\,a_n+300$.

4.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n,on a : $1200\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n\leqslant 1700$.
4.b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n=a_n-1200$.
5.a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
5.b. Exprimer v_n en fonction de n.
5.c. En déduire que pour entier naturel n, $a_n=500\times 0{,}75^n+1200$.

6.a. Déterminer la limite de la suite (a_n).
6.b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexe de l'exercice.

7.a. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1280.

```
def seuil():
  n=0
  A=1700
  While . . . .
    n=n+1
    A= . . . .
  return . .
```

7.b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil().

CORRECTION

1. Chaque année 15 % des membres du club A changent de club et 10 % des membres du club B changent de club.

$a_1=a_0-\frac{15}{100}a_0+\frac{10}{100}b_0$ $\quad b_1=b_0+\frac{15}{100}a_0-\frac{10}{100}b_0$ $\quad a_0=1700$ $\quad b_0=1300$

$a_1=1700-0{,}15\times1700+0{,}1\times130=1700-255+130=1575$

$b_1=1300+0\,15\times1700-0{,}1\times1300=1300+255-130=1425$

2. Aucun sportif ne quitte le groupe, donc pour tout entier naturel n : $a_n+b_n=3000$.

3. Pour tout entier naturel n :

$a_{n+1}=a_n-0{,}15\,a_n+0{,}1\,b_n$ or $b_n=3000-a_n$

$a_{n+1}=a_n-0{,}15\,a_n+0{,}1(3000-a_n)=(1-0{,}15-0{,}1)a_n+300$

$a_{n+1}=0{,}75\,a_n+300$

4.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $1200\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n\leqslant1700$.

<u>Initialisation</u>

$a_0=1700$ et $a_1=1575$ donc $1200\leqslant a_1\leqslant a_0\leqslant1700$.

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n on suppose que : $1200\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n\leqslant1700$ et on doit démontrer que : $1200\leqslant a_{n+2}\leqslant a_{n+1}\leqslant1700$.

Si $1200\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n\leqslant1700$ alors $0{,}75\times1200\leqslant0{,}75\times a_{n+1}\leqslant0{,}75\times a_n\leqslant0{,}75\times1700$ (car 0,75>0)

soit $900\leqslant0{,}75\,a_{n+1}\leqslant0{,}75\,a_n\leqslant1275$ et $900+300\leqslant0{,}75\,a_{n+1}+300\leqslant0{,}75\,a_n+300\leqslant1275+300$

$0{,}75\,a_{n+1}+300=a_{n+2}$ et $0{,}75\,a_n+300=a_{n+1}$

donc $1200\leqslant a_{n+2}\leqslant a_{n+1}\leqslant1575\leqslant1700$.

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $1200\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n\leqslant1700$.

4.b. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1}\leqslant a_n$, la suite (a_n) est décroissante.

Pour tout entier naturel n, $1200\leqslant a_n$, la suite (a_n) est minorée par 1200.

Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite (a_n) converge.

5. Pour tout entier naturel n : $v_n=a_n-1200 \Leftrightarrow a_n=v_n+1200$

5.a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=a_{n+1}-1200=0{,}75\,a_n+300-1200=0{,}75(v_n+1200)-900=0{,}75\,v_n+900-900$

$v_{n+1}=0{,}75\,v_n$ la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=0{,}75$.

5.b. $v_0=a_0-1200=1700-1200=500$

Pour tout entier naturel n : $v_n=0{,}75^n\,v_0=500\times0{,}75^n$.

5.c. Pour tout entier naturel n : $a_n=v_n+1200=500\times0{,}75^n+1200$

6.a. $0<0{,}75<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}75^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1200$

6.b. À long terme il y aura 1200 membres dans le club A et 1800 membres dans le club B.

7.a.

```
def seuil():
  n=0
  A=1700
  While A≥1280
    n=n+1
    A=  500*0.75**n+1200
  return n
```

7.b. On doit déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $a_n<1280$.

$a_n<1280 \Leftrightarrow 500\times 0{,}75^n+1200<1280 \Leftrightarrow 500\times 0{,}75^n<80 \Leftrightarrow 0{,}75^n<\frac{80}{500}=0{,}16$

$\Leftrightarrow \ln\left(0{,}75^n\right)<\ln\left(0{,}16\right)$ (car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

$\Leftrightarrow n\times\ln\left(0{,}75\right)<\ln\left(0{,}16\right)$ (0<0,75<1 donc ln(0,75)<0) $\Leftrightarrow n>\frac{\ln\left(0{,}16\right)}{\ln\left(0{,}75\right)}$.

En utilisant la calculatrice : $\frac{\ln\left(0{,}16\right)}{\ln\left(0{,}75\right)}\simeq 6{,}37$ et n est un entier naturel.

$\Leftrightarrow n\geqslant 7$

La valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil() est 7.