Exercice 3 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm, on considère les points :
$D(3;1;5)$ $E(3;-2;-1)$ $F(-1;2;1)$ $G(3;2;-3)$

1.a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.
1.b. Justifier que les points E, F et G ne sont pas alignés.

2.a. Donner une représentation paramétrique de la droite (FG).
2.b. On appelle H le point de coordonnées $(2;2;-2)$.
Vérifier que H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG).
2.c. Montrer que l'aire du triangle EFG est égale à $12\,\text{cm}^2$.

3.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG).
3.b. Déterminer une équation cartésienne du plan (EFG).
3.c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par D et orthogonale au plan (EFG).
3.d. On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG).
À l'aide des questions précédentes, calculer les coordonnées du point K.

4.a. Vérifier que la distance à DK est égale à $5\,\text{cm}$.
4.b. En déduire le volume du tétraèdre DEFG.

CORRECTION

1.a. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

1.b. $\overrightarrow{FG}\neq\vec{0}$, les points E, F et G sont alignés si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que

$\overrightarrow{FE}=\lambda.\overrightarrow{FG} \Leftrightarrow \begin{cases}-4=4.\lambda\\4=0.\lambda\\2=-4.\lambda\end{cases}$ $0.\lambda\neq4$ donc les points E,F et G ne sont pas alignés.

2.a. (FG) est la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{FG}$.

$M(x;y;z)$ appartient à la droite (FG) si et seulement s'il existe un nombre réel t tel que :

$\overrightarrow{FM}=t.\overrightarrow{FG} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=4.t\\y-2=0.t\\z-1=-4.t\end{cases}$ (FG) : $\begin{cases}x=4.t-1\\y=0.t+2\\z=-4t+1\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

2.b. On vérifie que $H(2;2;-2)$ appartient à (FG)

$\begin{cases}2=4t-1\\2=0.t+2\\-2=-4t+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4t=3\\4t=3\end{cases} \Leftrightarrow \left\{t=\frac{3}{4}\right.$

H est le projeté orthogonal de E sur (FG) si et seulement si $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.

$E(3;-2;-1)$ et $H(2;2;-2)$ $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{FG}=-1\times4+4\times0-1\times(-4)=-4+4=0$

donc H est le projeté orthogonal de E sur (FG).

2.c. On considère le triangle EFG.

EH est la hauteur du triangle issue de E.

$EH^2=(-1)^2+4^2+(-1)^2=18$ $EH=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$FG^2=4^2+0^2+(-4)^2=32$ $FG=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$A_{EFG}=\frac{1}{2}\times EH\times FG=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=12\,cm^2$

3.a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (EFG) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EFG) par exemple $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{EF}=2\times(-4)+1\times4+2\times2=-8+4+4=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{FG}=2\times4+1\times0+2\times(-4)=8-8=0$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (EFG).

3.b. M(x;y;z) appartient au plan (EFG) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{EM}=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\\z+1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{EM}=0 \Leftrightarrow 2\times(x-3)+1\times(y+2)+2\times(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y+2z-2=0$

3.c. (d) est la droite passant par D(3;1;5) et de vecteur $\vec{n}$.

(d) : $\begin{cases}x=2u+3\\y=u+1\\z=2u+5\end{cases}$ $u\in\mathbb{R}$

3.d. K est le oint d'intersection de la droite (d) et du plan (EFG).
On résout le système :

$$\begin{cases} 2x+y+2z-2=0 \\ x=2u+3 \\ y=u+1 \\ z=2u+5 \end{cases}$$ on obtient $2\times(2u+3)+1\times(u+1)+2\times(2u+5)-2=0$

$\Leftrightarrow \quad 4u+3+u+1+4u+10-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 9u+15=0 \quad \Leftrightarrow \quad u=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}$.

$x=-\frac{10}{3}+3=-\frac{1}{3}$ $\qquad y=-\frac{5}{3}+1=-\frac{2}{3}$ $\qquad z=-\frac{10}{3}+5=\frac{5}{3}$.

$K\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$;

4.a. $DK^2=\left(-\frac{1}{3}-3\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-1\right)^2+\left(\frac{5}{3}-5\right)^2=\left(-\frac{10}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{100+25+100}{9}=\frac{225}{9}=25$

$DK=\sqrt{25}=5$

4.b. Le volume du tétraèdre DEFG est égal à :

$V=\frac{1}{3}\times DK\times A_{EFG}=\frac{1}{3}\times 5\times 12=20\,cm^3$.