Exercice 1 5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
$f(x)=1+x^2-2x^2\ln(x)$.
On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée .

1. Justifier que $\lim_{x\to 0} f(x)=1$, en remarquant que $f(x)=1+x^2(1-2\ln(x))$, justifier que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=-4\ln(x)$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;+\infty[$ et que $\alpha\in[1;e]$.
On admet dans la suite de l'exercice que l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

5. On donne la fonction ci dessous écrit en Python. L'instruction *from lycee import** permet d'accéder à la fonction ln.

```
from lycee import *

def f(x):
  return 1+x**2-2*x**2ln(x)

def dichotomie(p):
  a=1
  b=2.7
  while b-a>10**(-p):
    if f(a)*f((a+b)/2)<0:
      b=(a+b)/2
    else:
      a=(a+b)/2
  return(a,b)
```

On a écrit dans la console d'exécution :
\>>> dichotomie(1)
Parmi les quatre propositions ci-dessous , recopier celle affichée par l'instruction précédente ?
Proposition A : (1,75;1,9031250000000002)
Proposition B : (1,85;1,9031250000000002)
Proposition C : (2,75;2,9031250000000002)
Proposition D : (2,85;2,9031250000000002)

Partie B

On considère la fonction g définie par l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+x^2}$.

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$.

2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x=\alpha$.

On admet que $g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 et T_α la tangente au point d'abscisse α .
Déterminer, en fonction de α les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α .

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

. $f(x)=1+x^2-2x^2\ln(x)$

$\lim_{x\to 0} x^2=0$ $\lim_{x\to 0} x\ln(x)=0$ donc $\lim_{x\to 0} -2x^2\ln(x)=0$ pour la somme $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

. $f(x)=1+x^2(1-2\ln(x))$

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} -2\ln(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ pour le produit $\lim_{x\to+\infty} x^2(1-2\ln(x))=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ $(x^2)'=2x$

$f'(x)=0+2x-4x\ln(x)+2x^2\times\frac{1}{x}=-4x\ln(x)$

$x>0$

$-4\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Si $0<x<1$ alors $\ln(x)<0 \Leftrightarrow -4x\ln(x)>0$

Si $1<x$ alors $\ln(x)>0 \Leftrightarrow -4x\ln(x)<0$.

3. Tableau de variations de f

x	0		1		+∞
f '(x)	‖	+	0	−	
f(x)	‖ 1	↗	2	↘	-∞

$f(1)=1+1-0=2$

4. f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty;2]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 appartenant à $]-\infty;2]$ admet un unique antécédent α appartenant à $[1;+\infty[$, c'est à dire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à $[1;+\infty[$.

On remarque que $f(e)=1+e^2-2e^2\ln(e)=1-e^2<0$.

f est continue et strictement décroissante sur $[1;e]$ à valeurs dans $[f(e);f(1)]=[1-e^2;2]$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution appartenant à $[1;e]$ donc α appartient à $[1;e]$.

5. On a écrit sur la console d'exécution : >>>dichotomie(1) donc $p=1$.

Le programme retourne un encadrement de α à 10^{-1} près et $1\leqslant\alpha\leqslant e\simeq 2{,}73$.

$e<2{,}75$ et $e<2{,}85$ donc les propositions C et D sont fausses.

$1{,}9031250000000002-1{,}75>0{,}1$ donc la proposition A est fausse.

Si l'une des quatre propositions est le résultat retourner par la console alors cette proposition est la B.

Partie B

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $g(x)=\frac{\ln(x)}{1+x^2}$.

$u(x)=\ln(x)$ $u'(x)=\frac{1}{x}$ $v(x)=1+x^2$ $v'(x)=2x$

$$g'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}=\frac{\frac{1}{x}\times(1+x^2)-2x\ln(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$g'(x)=\frac{1+x^2-2x\ln(x)}{x(1+x^2)^2}=\frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}.$$

2. Sur $]0;1]$ f est une fonction strictement croissante et $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ donc $1<f(x)$ conséquence $0<f(x)$.

Sur $[1;+\infty[$ f est strictement décroissante et $f(\alpha)=0$ donc :

si $1\leqslant x<\alpha$ alors $f(x)>f(\alpha)=0$

si $\alpha<x$ alors $f(\alpha)=0>f(x)$.

On obtient :

si $0<x<\alpha$ alors $g'(x)>0$ et g est strictement croissante sur $]0;\alpha]$

si $\alpha<x$ alors $g'(x)<0$ et g est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

Conséquence : g admet un maximum pour $x=\alpha$.

On admet que $g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$.

3. $g(1)=\frac{\ln(1)}{1+x^2}=0$ $g'(1)=\frac{f(1)}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ T_1 : $y-0=\frac{1}{2}(x-1)$ T_1 : $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$ $g'(\alpha)=0$ T_α : $y=\frac{1}{2\alpha^2}$

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2\alpha^2} \end{cases}$ on obtient : $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\alpha^2}$ $\Leftrightarrow$ $x=1+\frac{1}{\alpha^2}$.

Le point d'intersection des droites T_1 et T_α est le point de coordonnées : $\left(1+\frac{1}{\alpha^2};\frac{1}{2\alpha^2}\right)$.