Exercice 2 — 5 points

1. Entre 1998et 2020 en France 18221965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293898 ont donné naissance à des jumeaux et 4921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

1.a. Avec une précision de 0,1 %, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

1.b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements, qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.

On considère alors que ce pourcentage est négligeable.
On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.
On appelle accouchement double, un accouchement naissance à exactement deux enfants.
On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.
La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,984 et celle d'un accouchement double est égale à 0,16.
Les probabilités calculés dans la suite seront arrondies au millième.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.
On considère que ces n accouchements, sont indépendants les uns des autres.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

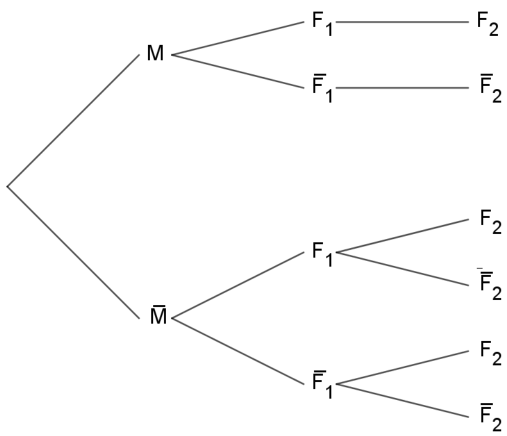
2.a. Dans le cas $n=20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

2.b. Par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n tel que : $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances doubles, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe) et 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux » qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).
Dans le cas de naissance doubles, on admet que, comme les naissances ordinaires , la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.
Dans le cas de naissances doubles dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.
On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les événements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On note $P(A)$ la probabilité de l'événement A et $\bar{A}$ l'événement contraire de A.



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

3.a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessus.
3.b. Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est 0,31507.
3.c. Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a. $\frac{293898}{18221965}\times 100 \simeq 1,6\%$ à 10^{-1} près.

1.b. $\frac{4941}{18221965}\times 100 \simeq 0,027 < 0,1$

2.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
Pour un jour donné, on choisit au hasard un accouchement réalisé.
Succès S : « l'accouchement est double » $P(S)=0,016$.
Échec $\bar{S}$: « l'accouchement est ordinaire » $P(\bar{S})=0,984$.

On considère 20 accouchements réalisés un jour donné, ces accouchements sont indépendants les uns des autres c'est à dire on considère 20 épreuves de Bernoulli indépendantes.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 20 épreuves.

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0,016$.

$P(X=1)=\binom{20}{1}\times 0,016^1\times 0,984^{19}= 20\times 0,016\times 0,984^{119}\simeq 0,236$ à 10^{-3} près.

2.b. Pour n accouchements réalisés un jour donné (n est un entier naturel non nul).
X est le nombre d'accouchements doubles réalisés parmi les n accouchements.

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres n et $p=0,016$.

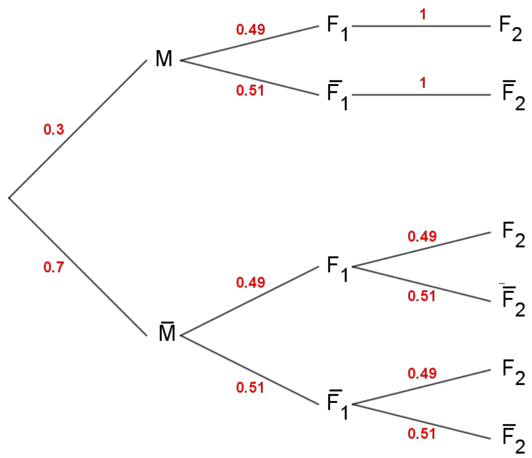
$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$.
$P(X=0)=0,984^n$ $\quad P(X\geqslant 1)=1-0,984^n$.
$P(X\geqslant 1)\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1-0,984^n\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,01\geqslant 0,984^n$
la fonction $\ln$ est croissante sur $]0;+\infty[$
$\Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant \ln(0,984^n) \Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant n\times\ln(0,984)$
$0<0,984<1$ donc $\ln(0,984)<0$
$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,984)}\leqslant n$
en utilisant la calculatrice :
$\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,984)}\simeq 285,5$ à 10^{-1} près et n est un entier naturel
$\Leftrightarrow 286\leqslant n$

La plus petite valeur n telle que $P(X\geqslant 1)\geqslant 0,99$ est 286.

3.a. $P(M)=0,3$
$P_M(F_1)=0,49$ $\quad P_M(\bar{F}_1)=0,51$
$P_{M\cap F_1}(F_2)=1$ car pour un accouchement double monozygote les deux nouveaux-nés sont de même sexe
$P_{M\cap\bar{F}_1}(\bar{F}_2)=1$
$P(\bar{M})=0,7$
$P_{\bar{M}}(F_1)=0,49$ $\quad P_{\bar{M}}(\bar{F}_1)=0,51$
$P_{\bar{M}\cap F_1}(F_2)=0,49$ $\quad P_{\bar{M}\cap F_1}(\bar{F}_2)=0,51$
$P_{\bar{M}\cap\bar{F}_1}(F_2)=0,49$ $\quad P_{\bar{M}\cap\bar{F}_1}(\bar{F}_2)=0,51$

On complète l'arbre pondéré.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés



3.b. $P(F_1 \cap F_2) = P(M \cap F_1 \cap F_2) + P(\bar{M} \cap F_1 \cap F_2)$

$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}3 \times 0{,}49 \times 1 + 0{,}7 \times 0{,}49 \times 0{,}49 = 0{,}147 + 0{,}16807$

$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}31507$

3.c. On nous demande de calculer :

$\frac{P(M \cap F_1 \cap F_2)}{P(F_1 \cap F_2)} = \frac{0{,}147}{0{,}31507} \simeq 0{,}467$ à 10^{-3} près.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés