Exercice 3 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points :
$A(0;4;16)$ $B(0;4;-10)$ $C(4;-8;0)$ $K(0;4;3)$.
On définit la sphère S de centre K et de rayon 13 comme ensemble des points M tels que $KM=13$.

1.a. Vérifier que le point C appartient à la sphère S.
1.b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

2.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2.b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. On admet que la sphère S coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive, et l'autre ayant une abscisse négative.
On note D celui qui a une abscisse positive.
3.a. Montrer que D a pour coordonnées $(12;0;0)$.
3.b. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
3.c. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

4. Calculer une valeur approchée à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle la formule du volume V d'un tétraèdre : $V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$
où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

CORRECTION

1.a. $C(4;-8;0)$ $K(0;4;3)$

$KC^2=(4-0)^2+(4+8)^2+(0-3)^2=16+144+9=169=13^2 \quad \Leftrightarrow \quad KC=13$

donc C appartient à la sphère S.

1.b. $A(0;4;16)$ $B(0;4;-10)$ $C(4;-8;0)$

$AB^2=(0-0)^2+(4-4)^2+(-10-16)^2=26^2=676$

$AC^2=(4-0)^2+(-8-4)^2+(0-16)^2=16+144+256=416$

$BC^2=(4-0)^2+(-8-4)^2+(0-10)^2=16+144+100=260$

$416+260=676$ donc $AC^2+BC^2=AB^2$

La réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que le triangle ABC est rectangle en C.

2.a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) par exemples : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\0\\-26\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-12\\-16\end{pmatrix} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=3\times0-1\times0+0\times(-26)=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=3\times4+1\times(-12)+0\times(-16)=0$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2.a. $M(x;y;z)$ $\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y+8\\z-0\end{pmatrix} \qquad \vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

$M(x;y;z)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\times(x-4)+1\times(y+8)+0\times z=0$

$\Leftrightarrow \quad 3x+y+0\times z-4=0$.

3.a. Les coordonnées d'un point de l'axe des abscisses sont $(x;0;0)$ donc $D(x;0;0)$ avec x réel positif.

D appartient à la sphère S si et seulement si $KD=13$.

$KD^2=(x-0)^2+(0-4)^2+(0-3)^2=x^2+16+9=x^2+25$

$KD^2=13^2=169=x^2+25 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=144=12^2$

Or $x>0$ donc $x=12$ et $D(12;0;0)$.

3.b. Δ est la droite passant par D et de vecteur directeur $\vec{n}$.

M(x;y;z) appartient à $\Delta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=3\times t+12\\ y=1\times t+0\\ z=0\times t+0\end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=3t+12\\ y=t\\ z=0\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

3.c. Δ est perpendiculaire au plan (ABC) donc Δ est sécante au plan (ABC).

On note H le point d'intersection du plan (ABC) et de la droite Δ.

Pour calculer les coordonnées du point H on résout le système : $\begin{cases}3x+y-4=0\\ x=3t+12\\ y=t\\ z=0\end{cases}$

On obtient : $3\times(3t+12)+t-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad 10t+32=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-\dfrac{32}{10}=-\dfrac{16}{5}$.

$x=-\dfrac{48}{5}+\dfrac{60}{5}=\dfrac{12}{5} \qquad y=-\dfrac{16}{5} \qquad z=0 \qquad H\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{16}{5};0\right)$.

La distance du point D au plan (ABC) est égale à DH.

$$DH^2=\left(\frac{12}{5}-12\right)^2+\left(-\frac{16}{5}\right)^2+0^2=\frac{48^2}{25}+\frac{16^2}{25}=\frac{16^2}{25}(9+1)=\frac{16^2\times10}{25}$$

$DH=\dfrac{16\sqrt{10}}{5}$.

4. Le triangle ABC est rectangle en C.

$\mathscr{B}=\mathscr{A}_{ABC}=\dfrac{AC\times BC}{2}$

$AC^2=416=16\times 26$ $\quad AC=4\sqrt{26}$

$BC^2=260=4\times 65$ $\quad BC=2\sqrt{65}$

$AC\times BC=4\sqrt{26}\times 2\sqrt{65}=8\sqrt{2\times 13\times 5\times 13}=8\times 13\sqrt{10}=104\sqrt{10}$

$\mathscr{B}=\dfrac{104\sqrt{10}}{2}=52\sqrt{10}$ (unité d'aire).

La hauteur h associée à la base ABC du tétraèdre $ABCD$ est $h=DH$.

$V=\dfrac{1}{3}+52\sqrt{10}\times\dfrac{16\sqrt{10}}{5}=\dfrac{52\times 16\times 2}{3}=\dfrac{1664}{3}\simeq 554{,}67$ (unité de volume)

$V=555$ à l'unité près.