## Exercice 4 5 points

**Partie A**

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)$ définie par $u_0=0,3$ et la relation de récurrence, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=2u_n(1-u_n)$.
Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(1-x)$.

**1.** Démontrer que la fonction $f$ strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

**2.** On admet que pour tout entier naturel n : $0\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{2}$

Calculer $u_1$ puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant u_{n+1}$.

**3.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

**4.** Justifier que la limite de la suite $(u_n)$ est égale à $\frac{1}{2}$.

**Partie B**

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population 3000 individus.
On note $P_n$ l'effectif en milliers de la population l'année 2022+n. Ainsi $P_0=3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de verhulst, mathématicien belge du XIXème siècle, on considère que, pour tout entier naturel n : $P_{n+1}-P_n=P_n(1-bP_n)$, où b est un réel strictement positif.
Le réel b est le facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

**1.** Dans cette question b=0.
**1.a.** Justifier que la suite $(P_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
**1.b.** Déterminer la limite de suite $P_n$.

**2.** Dans cette question $b=0,2$.
**2.a.** Pour tout entier naturel n, $v_n=0,1\times P_n$.
Calculer $v_0$ puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=2v_n(1-v_n)$.
**2.b.** Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

 

**CORRECTION**

**Partie A**

**1.** Pour tout nombre réel x, $f(x)=2x(x-1)$.

$f(x)=2x-2x^2$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ $f'(x)=2-4x$

$2-4x\geqslant 0 \Leftrightarrow 2\geqslant 4x \Leftrightarrow \frac{2}{4}\geqslant x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\geqslant x$ et f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

donc f est croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

**2.** Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=2u_n(1-u_n)$.

$u_0=0,3$ donc $u_1=2\times 0,3(1-0,3)=0,6\times 0,7=0,42$.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n\leqslant u_{n+1}$.

Initialisation

$u_0=0,3$ $u_1=0,42$ donc $u_0\leqslant u_1$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $u_n\leqslant u_{n+1}$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}$.

Remarque :

On admet que pour tout entier naturel n, on a $0\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{2}$ et f est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

donc $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 0\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$

Conséquence :

Si $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$ alors $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\frac{1}{2}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\leqslant u_{n+1}$.

**3.** Pour tout entier naturel n on a $u_n\leqslant u_{n+1}$ et $u_n\leqslant\frac{1}{2}$ alors $(u_n)$ est une suite croissante et majorée donc convergente.

**4.** f est continue sur $\mathbb{R}$, soit L la limite de la suite $(u_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=L$.

Pour tout entier naturel n, $f(u_n)=u_{n+1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(L)$ donc $f(L)=L$.

On résout l'équation $f(x)=x$ :

$2x(1-x)=x \Leftrightarrow 2x-2x^2=x \Leftrightarrow x-2x^2=0 \Leftrightarrow x(1-2x)=0 \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ou } x=\frac{1}{2}\right)$.

$(u_n)$ est une suite croissante et $u_0=0,3$ donc $0,3\leqslant L$ et la limite L est égale à $\frac{1}{2}$.

**Partie B**

**1.a.** $b=0$ donc pour entier naturel n : $P_{n+1}-P_n=P_n(1-0\times P_n) \Leftrightarrow P_{n+1}-P_n=P_n \Leftrightarrow P_{n+1}=2P_n$

$(P_n)$ est une suite géométrique de raison 2.

**1.b.** $P_0=3$ donc pour tout entier naturel n : $P_n=3\times 2^n$.

$2>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=+\infty$

**2.a.** $b=0,2$ et pour tout entier naturel $n$ : $v_n=0,1\times P_n$
donc $v_0=0,1\times P_0=0,1\times 3=0,3$ .
Pour tout entier naturel $n$ : $v_n=0,1\,P_n \Leftrightarrow P_n=10\,v_n$
$P_{n+1}-P_n=P_n(1-0,2\,P_n) \Leftrightarrow 10\,v_{n+1}-10\,v_n=10\,v_n(1-2\,v_n) \Leftrightarrow v_{n+1}-v_n=v_n(1-2\,v_n)$
$\Leftrightarrow v_{n+1}=v_n+v_n-2\,v_n^2 \Leftrightarrow v_{n+1}=2\,v_n-2\,v_n^2 \Leftrightarrow v_{n+1}=2\,v_n(1-v_n)$ .

**2.b.** Pour $b=0,2$ , pour tpout entier naturel $n$ : $v_n=u_n$
donc $\lim_{n\to+\infty} v_n=\frac{1}{2}=0,5$ et $\lim_{n\to+\infty} P_n=5$ ( car $P_n=10\,v_n$ ).
Dans ce modèle pour $n$ assez grand, la population en $2022+n$ sera voisine de 5000 individus.