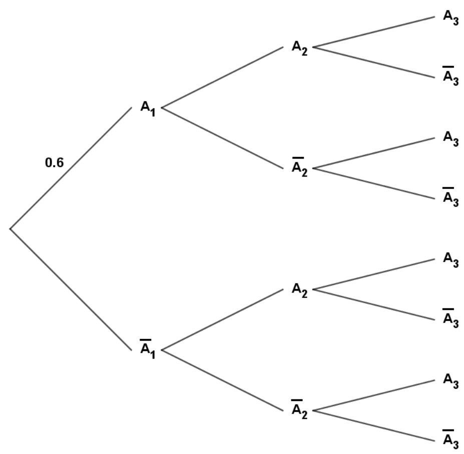
Exercice 1 5 points

Partie A

Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible en mouvement.
On a constaté que :
. Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas.
. Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.
La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est : 0,6.
On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs .
On considère les événements suivants :
. A_1 : « le joueur atteint la cible lors du 1er tir » ;
. A_2 : « le joueur atteint la cible lors du 2ème tir » ;
. A_3 : « le joueur atteint la cible lors du 3ème tir ».

1. Recopier et compléter, avec les probabilités correspondantes sur chaque branche, l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. Montrer que la probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est égale à $0{,}4015$.

3. L'objectif de cette question est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$.
3.a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0.1			0.0735

3.b. Calculer $E(X)$.
3.c. Interpréter le précédent résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On considère N, un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Un groupe de N personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes.
Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois la cible.
On note Y la variable aléatoire qui compte parmi les N le nombres de joueurs déclarés gagnants.

1. Dans cette question $N=15$.
1.a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
1.b. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'exactement 5 joueurs soient gagnants à ce jeu.

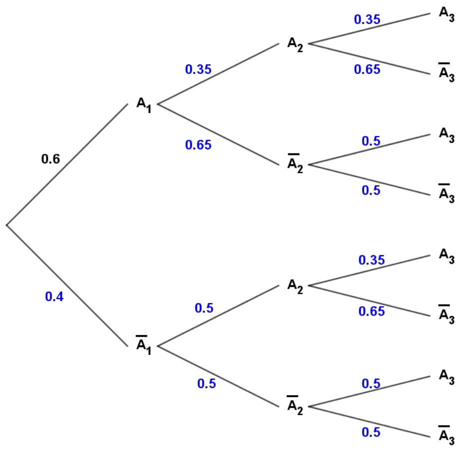
2. Par la méthode de votre choix, que vous expliciterez, déterminer le nombre minimum de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98.

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé précise :

- $P(A_1)=0,6$ donc $P(\bar{A}_1)=1-0,6=0,4$
- $P_{A_1}(\bar{A}_2)=0,65$ et $P_{A_2}(\bar{A}_3)=0,65$ donc $P_{A_1}(A_2)=1-0,65=0,35$ et $P_{A_2}(A_3)=0,35$
- $P_{\bar{A}_1}(A_2)=0,5$ et $P_{\bar{A}_2}(A_3)=0,5$ donc $P_{\bar{A}_1}(\bar{A}_2)=1-0,5=0,5$ et $P_{\bar{A}_2}(\bar{A}_3)=0,5$;
- On obtient comme arbre pondéré :



2. La probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible est égale à :

$P(A_1\cap A_2\cap \bar{A}_3)+P(A_1\cap \bar{A}_2\cap A_3)+P(\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3) = 0,6\times 0,35\times 0,65+0,6\times 0,65\times 0,5+0,4\times 0,5\times 035$

$= 0,1365+0,195+0,07 = 0,4015$

3.a. $P(X=1)=1-0,1-0,4015-0,0735=0,425$

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0.1	0.425	0.4015	0.0735

3.b. $E(X)=0\times 0,1+1\times 0,425+2\times 0,4015+3\times 0,0735=1,4485$

3.c. $E(X)\simeq 1,5$.

En moyenne, sur 6 tirs les joueurs atteignent 3 fois la cible, c'est à dire les joueurs atteignent la cible une fois sur deux.

Partie B

1.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

un joueur effectue trois tirs sur une cible mouvante.

Succès S : « le joueur atteint trois fois la cible » la probabilité se succès est $P(S)=0,0735$.

Échec $\bar{S}$: « le joueur n'atteint pas trois fois la cible » la probabilité de l'échec est $P(\bar{S})=0,92265$.

Les quinze joueurs jouent dans des conditions identiques et indépendantes donc on effectue quinze épreuves indépendantes.

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0,0735$.

1.b. $P(X=5) = \binom{15}{5} 0,0735^5\times 0,9265^{10}\simeq 0,003$ **à 10^{-3} près.**

2. N est un entier naturel non nul.

Soit K l'événement : « au moins un joueur, parmi les N joueurs, est gagnant ».

$\bar{K}$ est l'événement « les N joueurs sont perdants ».
$P(\bar{K})=0{,}9265^N$ et $P(K)=1-0{,}9265^N$.
On veut : $P(K)\geqslant 0{,}98 \Leftrightarrow 1-0{,}9265^N\geqslant 0{,}98 \Leftrightarrow 0{,}02\geqslant 0{,}9265^N$
ln est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$.
$\Leftrightarrow \ln(0{,}02)\geqslant \ln(0{,}9265^N) \Leftrightarrow \ln(0{,}02)\geqslant N\times\ln(0{,}9265)$
$0<0{,}9265<1$ et $\ln(0{,}9265)<0$
$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}9265)}\leqslant N$
En utilisant la calculatrice :
$\dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}9265)}\simeq 51{,}24$ et N est un entier naturel
$\Leftrightarrow 52\leqslant N$
52 est le nombre minimal de personnes devant se présenter au stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98.