Exercice 2 5 points

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points :
$A(1;1;-4)$ $B(2;-1;-3)$ $C(0;-1;-1)$ et $\Omega\,(1;1;2)$.

1. Démontrer que les points A, B, et C définissent un plan.

2.a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

2.b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+y+z+2=0$.

3.a. Justifier que le point Ω n'appartient pas au plan (ABC).
3.b. Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).

On admet que $\Omega H=2\sqrt{3}$.
On définit la sphère S de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ comme l'ensemble de tous les points M de l'espace telle que $\Omega M=2\sqrt{3}$.

4. Justifier, sans calcul, que tout point N du plan (ABC), distinct de H, n'appartient pas à la sphère S.

On dit qu'un plan P est tangent à la sphère S en un point K lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :
. $K\in P\cap S$
. $(\Omega K)\perp(P)$

5. Soit le plan P d'équation cartésienne $x+y-z-6=0$ et le point K de coordonnées $K(3;3:0)$.
Démontrer que le plan P est tangent à la sphère S au point K.

6. On admet que les plans (ABC) et P sont sécants selon une droite (Δ) .
Déterminer une équation paramétrique de (Δ) .

CORRECTION

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{AB}=\lambda.\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés et déterminent un plan.

2.a. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) par exemples : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1\times1+1\times(-2)+1\times1=1-21=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1\times(-1)+1\times(-2)+1\times3=-1-2+3=0$

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

2.b. $M(x;y;z)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z+4\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 1\times(x-1)+1\times(y-1)+1\times(z+4)=0 \Leftrightarrow x+y+z-1-1+4=0$

$\Leftrightarrow x+y+z+2=0$

3.a. $\Omega(1;1;2)$ $1+1+2+2=6\neq0$ donc le point Ω n'appartient pas au plan (ABC).

3.b. H est le point d'intersection de la droite (D) passant par le point Ω et de vecteur directeur $\vec{n}$ et du plan (ABC).

$\Omega(1;1;2)$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(D):\begin{cases}x=t+1\\y=t+1\\z=t+2\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Pour déterminer les coordonnées du point H on résout le système :

$$\begin{cases}x+y+z+2=0\\x=t+1\\y=t+1\\z=t+2\end{cases}$$

On obtient : $t+1+t+1+t+2+2=0 \Leftrightarrow 3t+6=0 \Leftrightarrow t=-2$

$x=-2+1=-1$ $y=-2+1=-1$ $z=-2+2=0$ $H(-1;-1;0)$.

<u>Remarque</u>

$\Omega M^2=(-1-1)^2+(-1-1)^2+(0-2)^2=4+4+4=12$

$\Omega M=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$;

4. Soit N un point quelconque du plan (ABC) distinct du point H.

On considère le triangle ΩNH, ce triangle est rectangle en H, en utilisant le théorème de Pythagore :

$\Omega N^2=NH^2+H\Omega^2$ or $N\neq H$ donc $NH\neq0$ et $\Omega N^2\neq H\Omega^2$ donc le point N n'appartient pas à la sphère S.

5. P : $x+y-z-6=0$ $K(3;3;0)$

. $3+3-0-6=0$ donc K appartient au plan P.

$\Omega K^2=(3-1)^2+(3-1)^2+(0-2)^2=4+4+4=12$

$\Omega K=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ donc $K\in S$

et $K\in P\cap S$

. $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et $\overrightarrow{\Omega K}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\Omega K}=2\vec{N}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega K}$ est orthogonal au plan P donc $(\Omega K)\perp(P)$

Le plan P est tangent à la sphère S au point K.

6. $\begin{cases}x+y+z+2=0\\x+y-z-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+z=-y-2\\x-z=-y+6\end{cases}$

On pose $y=\lambda\in\mathbb{R}$

$2x=-2\lambda+4 \Leftrightarrow x=-\lambda+2$

$2z=-8 \Leftrightarrow z=-4$

(Δ) : $\begin{cases}x=-\lambda+2\\y=\lambda\\z=-4\end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$