Exercice 3 5 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=5u_n-8n+6$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Soit n un entier naturel.
Recopier et compléter la fonction suite_u d'argument n ci-dessous écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur u_n.

```
def suite_u(n):
  u= . . . .
  for i in range(1;n+1):
    u= . . . ..
  return u
```

3.a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 2n$.
3.b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3.c. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier n vérifiant $n\geqslant n_0$, $u_n\geqslant 10^p$?

4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $v_n=u_n-2n+1$;
5.a. En utilisant la fonction suite_u précédente, on a écrit, en langage Python, la fonction suite_v ci-dessous :

```
def suite_v(n):
  L=[ ]
  for i in range(n+1):
    L.append(suite_u(i))-2*i+1)
  return L
```

La commande « L.append » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.

Lorsqu'on saisit suite_v(5) dans la console , on obtient l'affichage suivant :

>>> suite_v(5)
[1,5,25,125,625,3125]

Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.
Démontrer cette conjecture.

5.b. En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.

CORRECTION

1. $u_0=0$ et pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=5u_n-8n+6$.

- $u_1=5\times 0-8\times 0+6=6$
- $u_2=5\times 6-8\times 1+6=28$

2.

```
def suite_u(n):
  u= 0
  for i in range(1;n+1):
    u= 5*u-8*i+6
  return u
```

3.a. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant 2n$.

Initialisation

$u_0=0$ et $2\times 0=0$ donc $u_0\geqslant 2\times 0$ et la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose $u_n\geqslant 0$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\geqslant 2\times(n+1)$.

Or $u_{n+1}=5u_n-8n+6$.

Si $u_n\geqslant n$ alors $u_{n+1}\geqslant 5\times 2n-8n+6=2n+6=2\times(n+1)+4\geqslant 2\times(n+1)$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant 2n$.

3.b. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty$ et pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant 2n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

3.c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ donc pour tout nombre réel positif A (aussi grand que l'on veut), il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n vérifiant $n\geqslant n_0$ on ait $u_n\geqslant A$.

On choisit $A=10^p$ avec p entier naturel non nul donné et on détermine alors n_0 .

4. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}-u_n=5u_n-8n+6-u_n=4u_n-8n+6$.

Or $u_n\geqslant 2n$ donc $u_{n+1}-u_n\geqslant 4\times 2n-8n+6=6>0$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

5.a. On remarque : $5=1\times 5$; $25=5\times 5$; $125=25\times 5$ ..... .

On conjecture : Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1}=5\times v_n$.

Démonstration de la conjecture

Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-2\times(n+1)+1=5u_n-8n+6-2n-2+1=5u_n-10n+5=5\times(u_n-2n+1)=5v_n$

5.b. $v_0=u_0-2\times 0+1=1$ donc la suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=1$ et de raison $q=5$ donc pour tout entier naturel n : $v_n=5^n$.

$v_n=u_n-2n+1 \quad\Leftrightarrow\quad u_n=v_n+2n-1$

Pour tout entier naturel n : $u_n=5^n+2n-1$.

(On peut vérifier pour les valeurs de n : 0 ; 1 ; 2)