Exercice 4 — 5 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{4}x$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

2.a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=\frac{e^x-3}{4(e^x+1)}$.

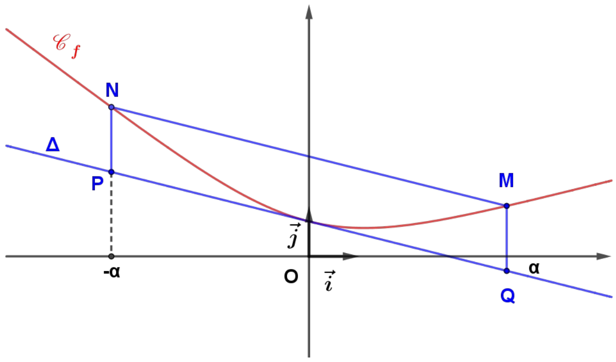
2.b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2.c. Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle [2;5].

Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f''(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

On note Δ la tangente de la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente Δ et le quadrilatère MNPQ, tel que M et N sont les points d'abscisses respectives α et $-\alpha$ et Q et P les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1.a. Justifier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1.b. En déduire que la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$ est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.

2.a. Montrer que $f(-\alpha)=\ln(e^{-\alpha}+1)+\frac{3}{4}\alpha$.

2.b. Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x : $f(x)=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{4}x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x})=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=\ln(1)=0$

d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4}x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2.a. $u(x)=1+e^{-x}$ $\quad u'(x)=-e^{-x}$ $\quad (\ln(u))'=\frac{u'}{u}$

$(\ln(1+e^{-x}))'=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\times\frac{e^{x}}{e^{x}}=\frac{-e^{0}}{e^{x}+e^{0}}=\frac{-1}{e^{x}+1}$

d'autre part $\left(\frac{1}{4}x\right)'=\frac{1}{4}$

$f'(x)=\frac{-1}{e^{x}+1}+\frac{1}{4}=\frac{-4+e^{x}+1}{4(e^{x}+1)}=\frac{e^{x}-3}{5(e^{x}+1)}$.

2.b. Pour tout nombre réel x : $4(e^{x}+1)>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $e^{x}-3$.

$e^{x}-3=0 \Leftrightarrow e^{x}=3 \Leftrightarrow x=\ln(3)$

$e^{x}-3>0 \Leftrightarrow e^{x}>3=e^{\ln(3)} \Leftrightarrow x>\ln(3)$

$e^{x}-3<0 \Leftrightarrow x<\ln(3)$

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau

x	-∞		ln(3)		+∞
f '(x)		−	0	+	
f(x)		↘		↗	+∞

$f(\ln(3))=\ln(1+e^{-\ln(3)})+\frac{1}{4}\ln(3)=\ln\left(1+e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}\right)+\frac{1}{4}\ln(3)=\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\ln(3)=\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{4}\ln(3)>0$

(on ne demande pas la limite en $-\infty$)

2.c. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$f(2)=\ln(1+e^{-2})+\frac{1}{2}\simeq0{,}627$ à 10^{-3} près.

$f(5)=\ln(1+e^{-5})+\frac{5}{4}\simeq0{,}0067+1{,}25=1{,}2567$ à 10^{-4} près.

$\ln(3)\simeq1{,}099$ à 10^{-3} près donc $\ln(3)<2$.

f est continue et strictement croissante sur $[2;5]$, à valeurs dans $[f(2);f(5)]$, 1 appartient à cet intervalle donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 1 admet un unique antécédent α appartenant à l'intervalle $[2:5]$ c'est à dire que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [2;5].

Partie B

1.a. Pour tout nombre réel x : $e^{x}>0$ donc $f''(x)=\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}>0$.

1.b. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes, en particulier, la partie de $\mathscr{C}_f$ pour x appartenant à $[-\alpha;\alpha]$ est au dessus de Δ (tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0).
La partie de plan située au dessus de $\mathscr{C}_f$ est une partie convexe du plan donc le segment [QP] est contenu dans cette partie et le segment [QP] est au dessus de la partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$.
La partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$ est donc inscrite dans le quadrilatère MNPQ.

2.b. Δ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(0;f(0))$.

$f(0)=\ln(1+e^0)+\frac{1}{4}\times 0=\ln(2)$ $\qquad f'(0)=\frac{e^0-3}{4(e^0+1)}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$

$\Delta:\ \ y=-\frac{1}{4}x+\ln(2)$

$N(-\alpha;f(-\alpha))$ $\qquad P\left(-\alpha;\frac{1}{4}\alpha+\ln(2)\right)$

$M(\alpha;f(\alpha))$ $\qquad Q\left(\alpha;-\frac{1}{4}\alpha+\ln(2)\right)$

$\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}0\\ f(-\alpha)-\frac{1}{4}\alpha-\ln(2)\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{MQ}\begin{pmatrix}0\\ f(\alpha)+\frac{1}{4}\alpha-\ln(2)\end{pmatrix}$

$f(-\alpha)-\frac{1}{4}\alpha-\ln(2)=\ln(1+e^{\alpha})-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{4}\alpha-\ln(2)=\ln(1+e^{\alpha})-\frac{1}{2}\alpha-\ln(2)$

$f(\alpha)+\frac{1}{4}\alpha-\ln(2)=\ln(1+e^{-\alpha})+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{4}\alpha-\ln(2)=\ln(1+e^{-\alpha})+\frac{1}{2}\alpha-\ln(2)$

Or $\ 1+e^{-\alpha}=1+\frac{1}{e^{\alpha}}=\frac{1+e^{\alpha}}{e^{\alpha}}$

donc $\ \ln(1+e^{-\alpha})=\ln\left(\frac{1+e^{\alpha}}{e^{\alpha}}\right)=\ln(1+e^{\alpha})-\ln(e^{\alpha})=\ln(1+e^{\alpha})-\alpha$

et $\ f(\alpha)+\frac{1}{4}\alpha-\ln(2)=\ln(1+e^{\alpha})-\alpha+\frac{1}{2}\alpha-\ln(2)=\ln(1+e^{\alpha})-\frac{1}{2}\alpha-\ln(2)$

On obtient : $\ f(-\alpha)-\frac{1}{4}\alpha-\ln(2)=f(\alpha)+\frac{1}{4}\alpha-\ln(2)$

et $\ \overrightarrow{PN}=\overrightarrow{QM}$ et le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

