Exercice 1 5 points

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=400$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}9\,u_n+60$.

1.a. Calculer u_1 et u_2 .
1.b. conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer , par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a les inégalités : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 600$.

3.a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3.b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.

4. on donne une fonction écrite en langage Python.

```
def mystere(seuil):
  n=0
  u=400
  while u<=seuil:
    n=n+1
    u=0.9*u+60
  return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : mystère(500) ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.
Le verger compte 400 arbres en 2023.
L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.
Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ?
Expliquer votre réponse.

CORRECTION

Partie A

1.a. $u_1=0,9\times 400+60=360+60=420$

$u_2=0,9\times 420+60=378+60=438$

1.b. On a $u_0<u_1<u_2$, on peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. On peut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 600$.

Initialisation

$u_0=400$ et $u_1=420$ donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 600$.

La propriété est donc vérifiée pour n=1.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que :
$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 600$ et on doit démontrer que : $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 600$.

Si $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 600$ alors $0,9\times 0\leqslant 0,9\times u_n\leqslant 0,9\times u_{n+1}\leqslant 0,9\times 600$ (car 0,9>0) soit
$0\leqslant 0,9\,u_n\leqslant 0,9\,u_{n+1}\leqslant 540$ et $0+60\leqslant 0,9\,u_n+60\leqslant 0,9\,u_{n+1}+60\leqslant 540+60$ soit
$60\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 600$ donc on obtient $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 600$

Conclusion

Le principe de récurrence me permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a :
$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 600$

3.a. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 600$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc convergente.

3.b. On remarque que pour tout entier naturel n, $f(u_n)=u_{n+1}$ avec f fonction définie sur $\mathbb{R}$
$f(x)=0,9\,x+60$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(L)$.

$f(L)=L \Leftrightarrow 0,9\times L+60=L \Leftrightarrow 60=0,1\times L \Leftrightarrow L=600$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=600$.

4. En utilisant la calculatrice, on obtient (on écrit les arrondis à 10^{-2} mais pour les calculs on utilise la précision de la calculatrice) :

$u_0=400$ $u=1=420$ $u_2=438$ $u_3=454,2$ $u_4=481,90$ $u_5=493,71$ $u_6=504,34>500$

On obtient 6 en exécutant le programme python.

Partie B

L'arboriculteur va être confronté à un problème de place dans son verger car :
si on pose, pour tout entier naturel n, v_n le nombre d'arbres du verger l'année $2023+n$.

$v_0=400$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1}=v_n-\dfrac{10}{100}v_n+60=0,9\,v_n+60$.

Pour tout entier naturel n, on a : $v_n=u_n$.

Donc en $2023+6=2029$ le nombre d'arbres du verger devrait dépasser 500.