Exercice 2 5 points

On considère le cube ABCDEFGH qui est représenté en ANNEXE.
Dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on considère les points M,N et P de coordonnées :
$M\left(1;1;\frac{3}{4}\right)$ $N\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ $P\left(1;0;-\frac{5}{4}\right)$.
Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

2. Placer les points M,N et P sur la figure donnée en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.

3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).

4.a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
4.b. Calculer l'aire du triangle MNP.

5.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

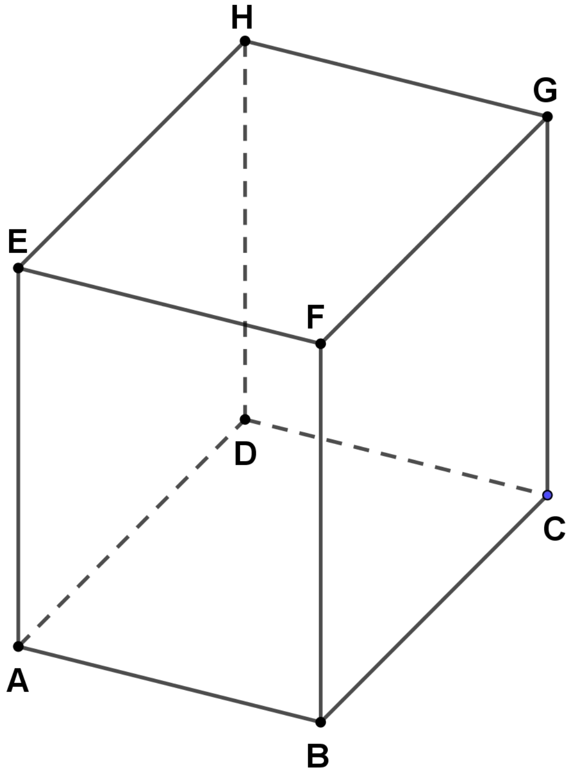
5.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x-8y+4z=0$.

6. On rappelle que le point F a pour coordonnées $F(1;0;1)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.

7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).
Montrer que les coordonnées du point L sont : $L\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)$.

8. Montrer que $FL=\frac{3\times\sqrt{125}}{35}$ puis calculer le volume du tétraèdre FMNP.
On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
$V=\frac{1}{3}\times\text{aire d'une base}\times\text{hauteur associée à cette base}$

ANNEXE



CORRECTION

1. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

2. Il faut regarder la feuille ANNEXE.

3. $\overrightarrow{MN}=\lambda.\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \begin{cases}-1=0\times\lambda\\ \frac{-1}{2}=-\lambda\\ \frac{1}{4}=-2\lambda\end{cases}$

Il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\overrightarrow{MN}=\lambda.\overrightarrow{MP}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires et les points M, N et P ne sont pas alignés.

4.a. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}=-1\times0-\frac{1}{2}\times(-1)+\frac{1}{4}\times(-2)=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux donc le triangle MNP est rectangle en M.

$MN^2=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{16+4+1}{16}=\frac{21}{16}$ $\quad MN=\frac{\sqrt{21}}{4}$

$MP^2=0+1+4=5$ $\quad MP=\sqrt{5}$

$MN\neq MP$ donc le triangle MNP n'est pas un triangle rectangle isocèle.

4.b. L'aire du triangle MNP est égale à : $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\times MN\times MP=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{4}\times\sqrt{5}=\frac{\sqrt{105}}{8}$ (unité d'aire).

5.a. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (MNP) si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (MNP) (par exemple $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$).

$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{MN}=5\times(-1)-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times\frac{1}{4}=-5+4+1=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{MP}=5\times0-8\times(-1)+4\times(-2)=8-8=0$

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

5.b. $R(x;y;z)$ $\quad\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ $\quad\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$

Le point R appartient au plan (MNP) si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{MR}=0$

$\Leftrightarrow\quad 5\times(x-1)-8\times(y-1)+4\times\left(z-\frac{3}{4}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5x-5-8y+8+4z-3=0$

$\Leftrightarrow\quad 5x-8y+4z=0$ (une équation cartésienne du plan (MNP)).

6. d est la droite passant par $F(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$

d : $\begin{cases}x=5t+1\\y=-8t+0\\z=4t+1\end{cases}$ $\quad t\in\mathbb{R}$ (représentation paramétrique de d).

7. Le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP) est le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite d.
Pour déterminer du point L, on résout le système suivant.

$$\begin{cases} 5x-8y+4z=0 \\ x=5t+1 \\ y=-8t \\ z=4t+1 \end{cases}$$

On obtient : $5\times(5t+1)-8\times(-8t)+4\times(4t+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 25t+5+64t+16t+4=0$

$\Leftrightarrow \quad 105t+9=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-\frac{9}{105}=-\frac{3}{35}$

$x=5\times\left(-\frac{3}{35}\right)+1=-\frac{3}{7}+\frac{7}{7}=\frac{4}{7}$

$y=-8\times\left(-\frac{3}{35}\right)=\frac{24}{35}$

$z=4\times\left(-\frac{3}{35}\right)+1=-\frac{12}{35}+\frac{35}{35}=\frac{23}{35}$

$L\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)$

8. $FL^2=\left(\frac{4}{7}-1\right)^2+\left(\frac{24}{35}-0\right)^2+\left(\frac{23}{35}-1\right)^2=\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{24}{35}\right)^2+\left(\frac{12}{35}\right)^2=\frac{15^2+24^2+12^2}{35^2}$

$FL^2=\frac{9\times25+9\times64+9\times16}{35^2}=\frac{9\times105}{35^2}$

$FL=\frac{3\times\sqrt{105}}{35}$

V est le volume (en unité de volume) du tétraèdre FMNP de base le triangle MNP et de hauteur associée FL.

$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{105}}{8}\times\frac{3\sqrt{105}}{35}=\frac{105}{8\times35}=\frac{3}{8}$.

ANNEXE