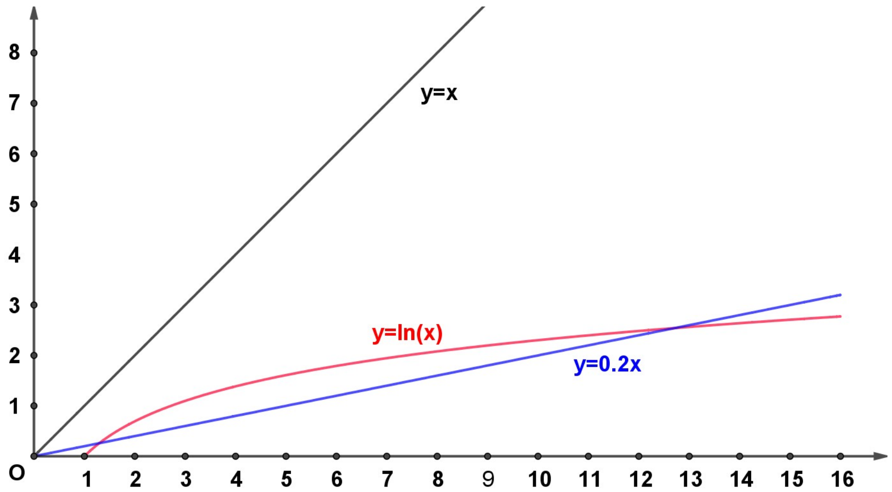
Exercice 3 — 5 points

Soit k un réel positif.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de sotutions de l'équation : $\ln(x)=kx$ de paramètre k.

1. Conjectures graphiques :

On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y=\ln(x)$, la droite d'équation $y=x$ ainsi que la droite d'équation $y=0{,}2x$.



À partir du graphique, ci -dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x)=kx$ pour $k=1$ puis pour $k=0{,}2$.

2. Étude du cas : $k=1$

On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-x$.
On note f' la fonction dérivée de f.

2.a. Calculer $f'(x)$.

2.b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremum s'il y en a.
Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2.c. En déduire le nombre le nombre de solution de l'équation $\ln(x)=x$.

3. Étude du cas général :

k est un nombre réel strictement positif.
On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln(x)-kx$.
On admet que le tableau de variations de la fonction g est le suivant :

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
g(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\frac{1}{k})$	$\searrow$	$-\infty$

3.a. Donner en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de l'équation $g(x)=0$.

3.b. Calculer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction de k.

3.c. Montrer que $g\left(\frac{1}{k}\right)>0$ équivaut à $\ln(k)<-1$.

3.d. Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x)=kx$ possède exactement deux solutions.

3.e. Donner, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\ln(x)=kx$.

CORRECTION

1. La courbe représentative de ln et la droite d'équation $y=x$ n'ont aucun point d'intersection.
Donc l'équation $\ln(x)=x$ n'admet aucune solution.
La courbe représentative de ln et la droite d'équation $y=0{,}2\,x$ ont deux points d'intersection.
Donc l'équation $\ln(x)=0{,}2\,x$ admet deux solutions.

2.a. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

2.b. Le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe de (1-x).
Si $0<x\leqslant 1$ alors $1-x\geqslant 0$ et f est croissante sur $]0;1]$.
Si $1\leqslant x$ alors $1-x\leqslant 0$ et f est décroissante sur $[1;+\infty[$.
$f(1)=-1$
Tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	‖	+	0	–	
f(x)	‖	↗	-1	↘	

2.c. -1 est un maximum absolu de f sur $]0;+\infty[$. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)\leqslant -1<0$ donc l'équation $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=x$ n'admet pas de solution.

3.a. Si $g\left(\frac{1}{k}\right)<0$ alors l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution.

Si $g\left(\frac{1}{k}\right)=0$ alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution : $\frac{1}{k}$.

Si $g\left(\frac{1}{k}\right)>0$ alors le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation

$g(x)=0$ admet deux solutions l'une dans l'intervalle $\left]0;\frac{1}{k}\right[$ l'autre dans l'intervalle $\left]\frac{1}{k};+\infty\right[$.

3.b. $g\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\left(\frac{1}{k}\right)-k\times\frac{1}{k}=-\ln(k)-1$

3.c. $g\left(\frac{1}{k}\right)>0 \Leftrightarrow -\ln(k)-1>0 \Leftrightarrow -1>\ln(k)$.

3.d. L'équation $\ln(x)=k\,x$ possède exactement deux solutions si et seulement si $-1>\ln(x) \Leftrightarrow$
$\ln\left(\frac{1}{e}\right)>\ln(k) \Leftrightarrow \frac{1}{e}>k$.

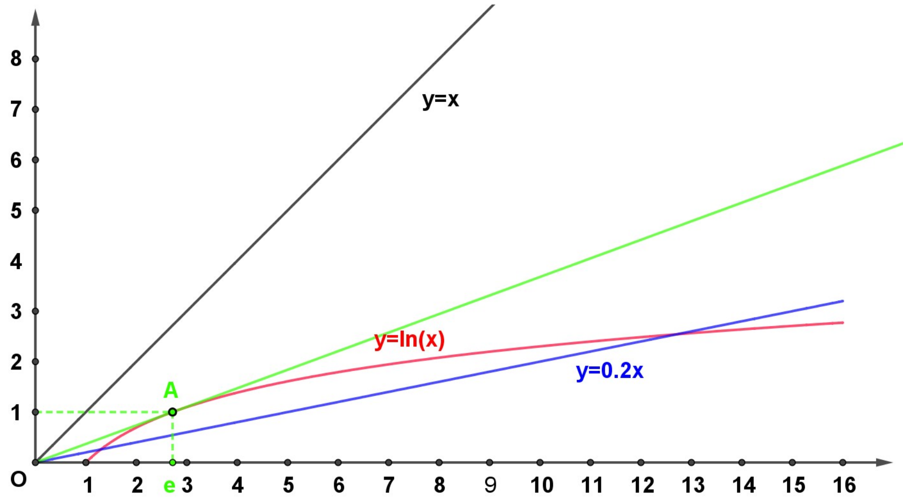
L'ensemble demandé est : $\left]0;\frac{1}{e}\right[$.

3.e. Si $0<k<\frac{1}{e}$ alors l'équation possède exactement deux solutions.

Si $k=\frac{1}{e}$ alors l'équation $\ln(x)=\frac{1}{e}x$ admet une solution unique : e.

On peut vérifier que la droite d'équation $y=\frac{1}{e}x$ est tangente à la courbe représentative de ln

au point $A(e;1)$.
On joint une figure non demandée.



Si $k > \frac{1}{e}$ l'équation n'admet pas de solution.