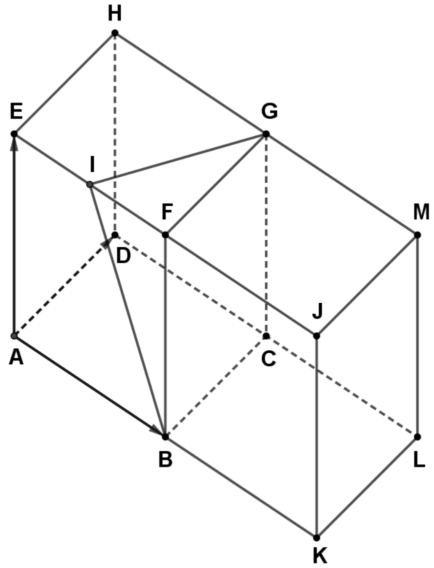
Exercice 1 — *5 points*

On considère deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG positionnés comme sur la figure suivante :



Le point I est le milieu de [EF].

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

Ainsi par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées : F(1;0;1) G(1;1;1) J(2;0;1).

1. Montrer que le volume du tétraèdre FIGB est égal à $\frac{1}{12}$ unité de volume.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$V=\frac{1}{3}\times\text{aire d'une base}\times\text{hauteur correspondante}$.

2. Déterminer les coordonnées du point I.

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BIG).

4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BIG) est : $2x-y+z-2=0$.

5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, orthogonale à (BIG) et passant par F.

6.a. La droite d coupe le plan (BIG) au point L.

Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$.

6.b. Calculer la longueur FL.

6.c. Déduire des questions précédentes, l'aire du triangle IGB.

CORRECTION

1. On choisit le triangle FIB rectangle en F comme base du tétraèdre FIGB et FG comme hauteur correspondante.

I est le milieu de [EF] donc $IF=\frac{1}{2}FE=\frac{1}{2}$ $FB=1$.

L'aire du triangle FIB est égale à $\frac{1}{2}\times IF\times FB=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{4}$ unité d'aire.

$FG=1$.

Le volume du tétraèdre FIGB est égal à $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{12}$ unité de volume.

2. $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$

3. $D(0;1;0)$ $J(2;0;1)$ $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BIG) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BIG) par exemple $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

$B(1;0;0)$ $G(1;1;1)$ $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BI}=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\times 0+1\times 1=-1+1=0$.

$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BG}=2\times 0-1\times 1+1\times 1=-1+1=0$.

Donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BIG).

4. Le plan (BIG) est le plan passant par $B(1;0;0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{DJ}$.

$R(x;y;z)$ appartient au plan (BIG) si et seulement si $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BR}=0$.

$\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BR}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BR}=0 \Leftrightarrow 2\times(x-1)-1\times y+1\times z=0 \Leftrightarrow 2x-y+z-2=0$;

$2x-y+z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (BIG).

5. La droite d est la droite passant par $F(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DJ}$.

Une représentation paramétrique de d est :

$$d:\begin{cases}x=2t+1\\y=-t+0\\z=t+1\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

6.a. Pour déterminer les coordonnées du point L, on résout le système : $\begin{cases}2x-y+z-2=0\\x=2t+1\\y=-t\\z=t+1\end{cases}$.

On obtient : $2\times(2t+1)-(-t)+1-2=0 \Leftrightarrow 4t+2t+t+1-2=0 \Leftrightarrow 6t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{6}$.

$x=2\times\left(-\frac{1}{6}\right)+1=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$ $y=-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$ $z=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$ $L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$.

6.b. $F(1;0;1)$

$FL^2=\left(\frac{2}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{6}-0\right)^2+\left(\frac{5}{6}-1\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$FL=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$ unité de longueur.

FL est la hauteur correspondante à la base IBG.

Le volume du tétraèdre $FIGB$ est : $V=\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\times\text{aire de } IBG\times\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\text{aire de IBG}=\frac{3\sqrt{6}}{12}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire