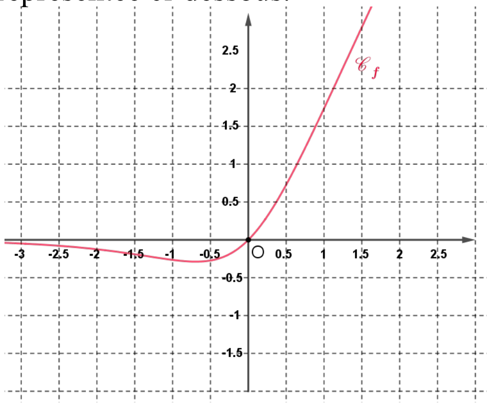
Exercice 1 6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation f(x)=2 semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est [-0.5;+∞[.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse x=0 semble être: y=1.5x.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par : $g(x)=e^{2x}-e^{x}+1$.

1. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

2. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

3. Montrer que $g'(x)=e^{x}(2e^{x}-1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

4. Étudier le sens de variation de la fonction g.
Dresser le tableau de variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X=e^{x}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.
Justifier que $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2);+\infty[$.

5. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2);+\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, por chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x, $g(x)=e^{2x}-e^{x}+1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$.

2. Pour tout nombre réel x, $g(x)=e^{2x}(1-e^{-x}+e^{-2x})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x}+e^{-2x})=1$ et $\lim\limits_{x\to x:+\infty} g(x)=\ln(1)=0$.

3. Pour tout nombre réel x, $(e^{x})'=e^{x}$ et $(e^{u})'=u'\times e^{u}$ donc $(e^{2x})'=2e^{2x}$

$g'(x)=2e^{2x}-e^{x}=e^{x}(2e^{x}-1)$.

4. Pour tout réel x, $e^{x}>0$, le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $2e^{x}-1$.

$2e^{x}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$2e^{x}-1>0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}>\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x>\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$

$2e^{x}-1<0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}<\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x<\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$

g est strictement croissante sur $[-\ln(2);+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;-\ln(2)]$.

g admet un minimum en -ln(2) ce minimum est égal à :

$g(-\ln(2))=e^{-2\ln(2)}-e^{-\ln(2)}+1=e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}-e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}+1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$.

Tableau de variations de g.

x	-∞		-ln(2)		+∞
g'(x)		−	0	+	
g(x)	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	+∞

5. Pour tout nombre réel x, $g(x)\geqslant\frac{3}{4}$ donc $g(x)>0$.

g est positive sur $\mathbb{R}$.

6. $X=e^{x}$ $\quad g(x)=e^{2x}-e^{x}+1=(e^{x})^{2}-e^{x}+1=X^{2}-X+1=T(X)$

$\Delta=1^{2}-4=-3<0$

Pour tout nombre réel X, $X^{2}-X+1>0$ donc $g(x)>0$.

Partie B

1. Pour tout réel x : $e^{2x}-e^{x}+1>0$ donc la fonction f telle que $f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=2e^{2x}-e^{x}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$

3. $f'(0)=\dfrac{2e^0-e^0}{e^0-e^0+1}=\dfrac{2-1}{1-1+1}=\dfrac{1}{1}=1$ $\quad f(0)=\ln(1)=0$

L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ à l'origine est $y=1\times x \quad \Leftrightarrow \quad y=x$

4. Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $g'(x)$ donc f et g ont les mêmes variations sur $\mathbb{R}$.

f est continue est décroissante sur $]-\infty;-\ln(2)]$ à valeurs dans $\left[\ln\left(\dfrac{3}{4}\right);0\right[$ donc l'équation $f(x)=2$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty;-\ln(2)[$.

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\ln(2);+\infty[$ à valeurs dans $\left[\ln\left(\dfrac{3}{4}\right);+\infty\right[$.

2 appartient à $\left[\ln\left(\dfrac{3}{4}\right);+\infty\right[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α appartenant à $[-\ln(2);+\infty[$.

En utilisant la calculatrice, par balayage on obtient :

$1,1<\alpha<1,2$ puis $1,12<\alpha<1,13$ $\quad \alpha=1,12$ à 10^{-2} près.

Partie C

1. Conjecture : **VRAIE**

α est une solution de l'équation $f(x)=2$.

2. Conjecture : **FAUSSE**

f est croissante sur l'intervalle $[-\ln(2);+\infty[$ contenant strictement l'intervalle $[-0,5;+\infty[$.

3. Conjecture : **FAUSSE**

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y=x$.