Exercice 3 — 4 points

Marie Sklodowska-Curie (1867-1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne) polonaise naturalisée française.
Deux prix Nobel lui ont été décernés : un en physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d'étudier le rayonnement radioactif au polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2g de polonium.
On sait que 1g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.
Pour $n\geqslant1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus au bout de n jours écoulés.

1.a. Vérifier que $v_0=6\times10^{21}$.
1.b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $v_{n+1}=0995\,v_n+1{,}5\times10^{19}$.

2.a. Démontrer par récurrence sur n, que : $0\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n$.
2.b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n, $u_n=v_n-3\times10^{21}$.
3.a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et de raison 0,995.
3.b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n=3\times10^{21}(0{,}995^n+1)$.
3.c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Déterminer par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4{,}5\times10^{21}$. Justifier la réponse.

5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Pour cela on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1 def noyaux(n):
2   V=L*10**21
3   L=[V]
4   for k in range(n):
5     V= . . .
6     L.append( V)
7   return L
```

5.a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.
5.b. Pour qu'elle vaeur de l'entier naturel n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

CORRECTION

1.a. 1g de plutonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques donc 2g de plutonium contient $2\times3\times10^{21}$ soit 6×10^{21} noyaux atomiques. v_0 est le nombre de noyaux atomiques contenu dans 2g de plutonium et $v_0=6\times10^{21}$.

1.b. Au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux atomiques se sont désintégrés, il reste donc :
$v_0-0{,}005\,v_0=0{,}995\,v_0$ noyaux atomiques, on ajoute 0,005g de polonium donc :
$0{,}005\times3\times10^{21}=0{,}015\times10^{21}=1{,}5\times10^{19}$ noyaux atomiques .
$v_1=0{,}995\,v_0+1{,}5\times10^{19}$
Même raisonnement, pour tout entier naturel $n\geqslant1$, pour passer de v_n à v_{n+1}.
$v_{n+1}=0{,}995\,v_n+1{,}5\times10^{19}$

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $0\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n$.

<u>Initialisation</u>
$v_0=6\times10^{21}$ $\quad v_1=0{,}995+6\times10^{21}+1{,}5\times10^{19}=5{,}73\times10^{21}+0{,}015\times10^{21}=5{,}745\times10^{21}$
donc $0\leqslant v_1\leqslant v_0$
La propriété est vérifiée pour $n=0$.

<u>Hérédité</u>
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n on suppose que $0\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n$ et on doit démontrer que $0\leqslant v_{n+2}\leqslant v_{n+1}$.
Or $0{,}995>0$ si $0\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n$ alors $0\leqslant0{,}995\,v_{n+1}\leqslant0{,}995\,v_n$
et $0\leqslant0{,}995\,v_{n+1}+1{,}5\times10^{19}\leqslant0{,}995\,v_n+1{,}5\times10^{19}$ soit $0\leqslant v_{n+2}\leqslant v_{n+1}$.

<u>Conclusion</u>
le principe de récurrence nous permet d'affirmer pour tout entier naturel n, on a $0\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n$.

2.b. Pour tout entier naturel n $v_{n+1}\leqslant v_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $0\leqslant v_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. Pour tout entier naturel n :
$u_n=v_n-3\times10^{21}\quad\Leftrightarrow\quad v_n=u_n+3\times10^{21}$

3.a. Pour tout entier naturel n.
$u_{n+1}=v_{n+1}-3\times10^{21}=0{,}995\,v_n+1{,}5\times10^{19}-3\times10^{21}=0{,}995\times(u_n+3\times10^{21})+1{,}5\times10^{19}-3\times10^{21}$
$u_{n+1}=0{,}995\,u_n+2{,}985\times10^{21}+0{,}015\times10^{21}-3\times10^{21}=0{,}995\,u_n$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $q=0{,}995$ et de premier terme u_0.
$u_0=v_0-3\times10^{21}=6\times10^{21}-3\times10^{21}=3\times10^{21}$.

3.b. Pour tout entier naturel n :
$u_n=u_0\times q^n=3\times10^{21}\times0{,}995^n$.
Et $v_n=u_n+3\times10^{21}=3\times10^{21}\times0{,}995^n+3\times10^{21}=3\times10^{21}(0{,}995^n+1)$

3.c. $0\leqslant0{,}995<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}995^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=3\times10^{21}$.
À très long terme, le nombre de noyaux atomiques de polonium chaque jour sera voisin de 3×10^{21}.

4. $v_n<4{,}5\times10^{21}\quad\Leftrightarrow\quad3\times10^{21}(0{,}995^n+1)<4{,}5\times10^{21}\quad\Leftrightarrow\quad0{,}995^n+1<1{,}5\quad\Leftrightarrow\quad0{,}995^n<0{,}5$
ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
$\Leftrightarrow\quad\ln(0{,}995^n)<\ln(0{,}5)\quad\Leftrightarrow\quad n\times\ln(0{,}995)<\ln(0{,}5)$
$0<0{,}995<1$ donc $\ln(0{,}995)<0$
$\Leftrightarrow\quad n>\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}995)}\simeq138{,}28$ (en utilisant la calculatrice)
$\Leftrightarrow\quad n>139$ (car n est un entier naturel).

Il faut 139 jours pour que le nombre de noyaux atomiques soit inférieur à $4,5\times 10^{21}$.

5.a. 1ère solution

V=0,995*V+1,5*10**21

2ème solution

V=3*10**21*(0,995**(k+1)+1)

Car « for k in range(n) » veut dire k prend successivement toutes les valeurs comprises entre 0 et (n-1).

5.b. Dans une semaine il y a 7 jours donc $n=52\times 7=364$.