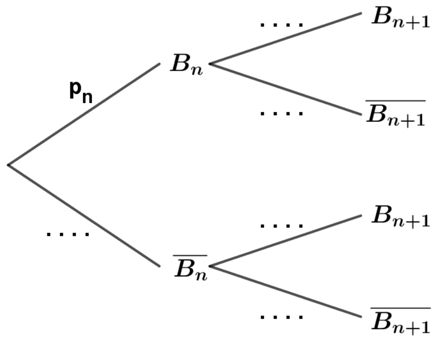
Exercice 2 — 6 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A
On estime que :
. lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 ;
. lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est 0,4.
On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phase de contrôle.
Soit n un entier naturel.
On note B_n l'événement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état.
On a donc $p_0=1$.
1. Donner p_1 et montrer que $p_2=0,85$;
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1}=0,5p_n+0,4$.
4.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n\geqslant 0,8$.
4.b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?
5.a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=p_n-0,8$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
5.b. En déduire l'expression de u_n puis p_n en fonction de n.
5.c. En déduire la limite de la suite (p_n).

Partie B
Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :
. l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
. la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à 0,8.
On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.
1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. On admet que $E(X)=12$. Interpréter le résultat.

CORRECTION

Partie A

1. $p_0=1$ c'est à dire la trottinette est en bon état le premier lundi.

Au bout d'une semaine $p_1=P(B_1)=0,9$, lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9.

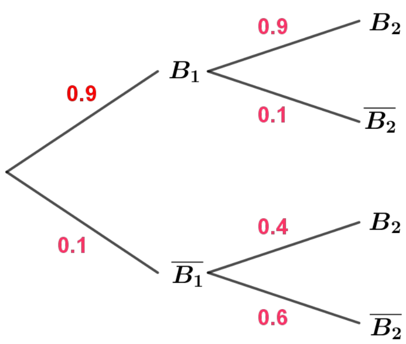
$P(\overline{B_1})=1-P(B_1)=1-0,9=0,1$.

$P_{B_1}(B_2)=0,9$ $\quad P_{B_1}(\overline{B_2})\,1-0,9=0,1$.

Lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est égale à 0,4.

$P_{\bar{B_1}}(B_2)=0,4$ et $P_{\bar{B_1}}(\overline{B_2})=1-0,4=0,6$

On obtient l'arbre pondéré suivant :

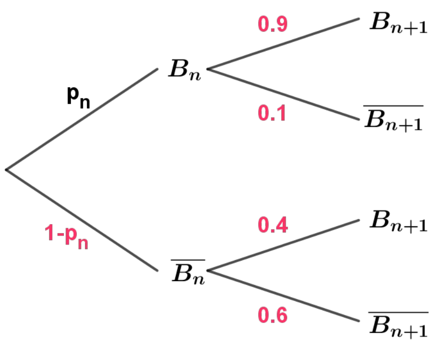


En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(B_2)=P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)+P(\overline{B_1})\times P_{\bar{B_1}}(B_2)$

$P(B_2)=0,9\times 0,9+0,1\times 0,4=0,81+0,04=0,85$

2. Pour tout entier naturel n :



3. Pour tout entier naturel n :

$p_{n+1}=P(B_{n+1})=P(B_n)\times P_{B_n}(B_{n+1})+P(\overline{B_n})\times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$

$p_{n+1}=p_n\times 0,9+(1-p_n)\times 0,4$

$p_{n+1}=0,5\,p_n+0,4$

4.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $p_n\geqslant 0,8$ .d'affirmer

Initilisation

$p_0=1\geqslant 0,8$ donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $p_n\geqslant 0,8$ et on doit démontrer que $p_{n+1}\geqslant 0,8$.

Or pour tout entier naturel n, $p_{n+1}=0,5\,p_n+0,4\geqslant 0,5\times 0,8+0,4$.

$p_{n+1}\geqslant 0,4+0,4=0,8$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.

4.b. L'entreprise peut affirmer que plus de 80 % des trottinettes sont en bon état.

5.a. Pour tout entier naturel n :

$u_n = p_n - 0,8 \quad \Leftrightarrow \quad p_n = u_n + 0,8$

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5\,p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(u_n + 0,8) - 0,4 = 0,5\,u_n + 0,4 - 0,4 = 0,5\,u_n$

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = p_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$ et de raison $q = 0,5$.

5.b. Pour tout entier naturel n :

$u_n = u_0 \times q^n = 0,2 \times 0,5^n$ et $p_n = u_n + 0,8 = 0,2 \times 0,5^n + 0,8$

5.c. $0 < 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,8$.

Partie B

1. On considère la loi de Bernoulli suivante : on choisit au hasard une trottinette du parc.
Succès S : « la trottinette choisie est en bon état » ; la probabilité de succès est $p = P(S) = 0,8$.
Échec $\bar{S}$: « la trottinette choisie est en mauvais état » ; la probabilité de l'échec est $q = P(\bar{S}) = 1 - 0,8 = 0,2$.
On effectue 15 tirages indépendants (car les tirages sont considérés être effectués avec remise).
X la variable aléatoire égale au nombre de succès en 15 épreuves, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$.

2. A est l'événement : « les 15 trottinettes sont en bon état ».
$P(A) = 0,8^{15} = 0,0352$ (en utilisant la calculatrice).

3. B est l'événement : « au moins 10 trottinettes sont en bon état parmi les 15 »
$P(B) = P(X \geqslant 10) = 0,9389$ (en utilisant la calculatrice).

4. On admet que $E(X) = 12$.
Remarque : $E(X) = n \times p = 15 \times 0,8 = 12$.
En moyenne, il y aura 12 trottinettes sur 15 en bon état.