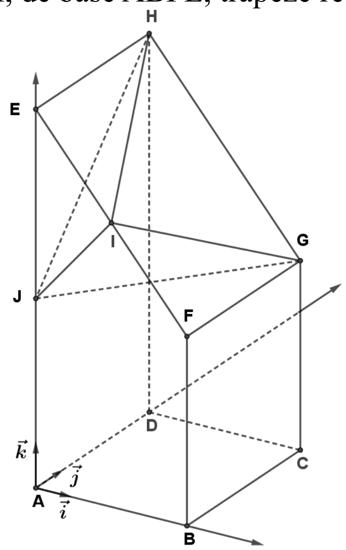
Exercice 3 — 6 points

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.



On associe à ce prisme le repère orthonormé $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que : $\vec{i}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $\vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$; $\vec{k}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.

De plus on a $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].

1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
2.b. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.

4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$.

5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).

6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.

7. En déduire le volume du tétraèdre IGIH.
On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
$V=\frac{1}{3}\times(\text{aire de la base})\times\text{hauteur}$

CORRECTION

1. On détermine les coordonnées des différents points de la figure.

$A(0;0;0)$ $B(4;0;0)$ $C(4;4;0)$ $D(0;4;0)$ $E(0;0;8)$ $F(4;0;4)$ $G(4;4;4)$ $H(0;4;8)$

$I\left(\frac{0+4}{2};\frac{0+0}{2};\frac{8+4}{2}\right)$ $I(2;0;6)$ $J\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+0}{2};\frac{0+8}{2}\right)$ $J(0;0;4)$

2.a. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ), par exemples : $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GJ}$.

$\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GI}.\vec{n}=(-2)\times(-1)+(-4)\times1+2\times1=2-4+2=0$

$\overrightarrow{GJ}.\vec{n}=(-4)\times(-1)+(-4)\times1+0\times1=4-4+0=0$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à (IGJ).

2.b. M(x;t;z) appartient au plan (IGJ) si et seulement si $\overrightarrow{GM}.\vec{n}=0$.

$\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\\z-4\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$M\in(IGJ) \Leftrightarrow (x-4)\times(-1)+(y-4)\times1+(z-4)\times1=0 \Leftrightarrow -x+4+y-4+z-4=0$

$\Leftrightarrow -x+y+z-4=0$

3. d est la droite passant par $H(0;4;8)$ et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$d : \begin{cases} x=-t+0 \\ y=t+4 \\ z=t+8 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

4. Le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ) est le point d'intersection du plan (IGJ) et de la droite d.

On résout le système :

$$\begin{cases} -x+y+z-4=0 \\ x=-t \\ y=t+4 \\ z=t+8 \end{cases}$$

On obtient $t+t+4+t+8-4=0 \Leftrightarrow 3t+8=0 \Leftrightarrow t=-\frac{8}{3}$

$x=\frac{8}{3}$; $y=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$; $z=-\frac{8}{3}+8=\frac{16}{3}$ et $L\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$.

5. $LH^2=\left(0-\frac{8}{3}\right)^2+\left(4-\frac{4}{3}\right)^2+\left(8-\frac{16}{3}\right)^2=\frac{64}{9}+\frac{64}{9}+\frac{64}{9}=\frac{64}{3}$

$LH=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ en unité de longueur.

6. $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{IJ}=2\times(-2)+4\times0+(-2)\times(-2)=-4+4=0$

Le triangle IGJ est rectangle en I.

7. L'aire du triangle IGJ est $\frac{1}{2}\times IG\times IJ$.

$IG^2=4+16+4=24$ $IG=2\sqrt{6}$ $IJ^2=4+0+4=8$ $IJ=2\sqrt{2}$

$A_{IGJ}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$ en unité d'aire.

Le volume du tétraèdre IGJH est : $V=\frac{1}{3}\times A_{IGJ}\times LH=\frac{1}{3}\times4\sqrt{3}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{32}{3}$ en unité de volume.