

**Exercice 4****3 points**

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2 + t + 2} \quad \text{où } t \text{ désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.}$$

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous.  
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

**. Affirmation 1 :**

« La population augmente en permanence ».

**. Affirmation 2 :**

« À très long terme, la population dépassera 21000 bactéries ».

**. Affirmation 3 :**

« La population de bactéries aura un effectif de 10000 à deux reprises au cours du temps ».

**CORRECTION**

**Affirmation 1 : FAUSSE**

Pour tout nombre réel de l'intervalle  $]0; +\infty[$   $f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2}$

$$(e^u)' = u' e^u \quad u(t) = -0,5t^2 + t + 2 \quad u'(t) = -t + 1$$

$$f'(t) = -(-t+1)e^{-0,5t^2+t+2} = (t-1)e^{-0,5t^2+t+2}$$

Le signe de  $f'(t)$  est le signe de  $(t-1)$ .

<b>x</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b><math>+\infty</math></b>
<b><math>f'(t)</math></b>		<b>-</b>	<b>0</b> <b>+</b>
<b><math>f(t)</math></b>	$e^3 - e^2$		$e^3$

$f$  est décroissante sur  $[0;1]$  donc la population de bactéries diminue pendant la première heure.

**Affirmation 2 : FAUSSE**

Pour tout nombre réel  $t$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $e^{-0,5t^2+t+2} > 0$  donc  $f(t) < e^3$

$$e^3 \approx 20.086$$

La population sera toujours inférieure à  $20086 < 21000$ .

**Affirmation 3 : VRAIE**

$$f(0) = e^3 - e^2 \approx 12.696$$

La population de bactéries est environ  $12656 > 10000$

$$f(1) = e^3 - e^{2.5} \approx 7.903$$

La population minimale est 7903 au bout d'une heure.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,5t^2 + t + 2) = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t^2+t+2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = e^3 ;$$

À long terme la population de bactéries sera voisine de 20086 donc supérieure à 10000.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que le nombre de bactéries sera de 10000 à deux reprises une fois dans la première heure et une deuxième fois à long terme.