Exercice 2 — 6 points

On considère la fonction f définie sur $]-1,5;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(2x+3)-1$.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :
$u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire
On considère la fonction g définie sur $]-1,5;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en -1,5.
On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5;+\infty[$

3.a. Démontrer que, dans l'intervalle $]-1,5;+\infty[$, l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α.
3.b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)
On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1,5;+\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x\in[-1;\alpha]$ alors $f(x)\in[-1,\alpha]$.

2.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$-1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.
2.b. En déduire que la suite (u_n) converge.

CORRECTION

$x \in]-1,5\,;+\infty[\qquad f(x)=\ln(2x+3)-1$

Partie A

1. $-1,5<x \quad \Leftrightarrow \quad 2x+3>0$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1,5\\ x>-1,5}} (2x+3)=0 \qquad \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \ln(X)=-\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x\to -1,5\\ x>-1,5}} \ln(2x+3)=-\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x\to -1,5\\ x>-1,5}} f(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x\to -1,5\\ x>-1,5}} g(x)=-\infty$.

On admet que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2. g est dérivable sur $]-1,5;+\infty[$.

$(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u} \qquad f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}$ et $g'(x)=\dfrac{2}{2x+3}-1=\dfrac{-2x-1}{2x+3}$.

Le signe de $g'(x)$ sur $]-1,5;+\infty[$ est le signe de (-2x-1).

$-2x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\dfrac{1}{2}=-0,5$

$-2x-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x>1 \quad \Leftrightarrow \quad x<-0,5$

$-2x-1<0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x<1 \quad \Leftrightarrow \quad x>-0,5$

Tableau de variation de g

x	-1.5		-0.5		-∞
g'(x)		+	0	—	
g(x)	-∞	↗	g(- 0.5)	↘	-∞

$g(-0,5)=\ln(-1+3)-1+0,5=\ln(2)-0,5\simeq 0,19>0$

3.a. g est continue et strictement croissante sur $]-0,5;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty;g(-0,5)[$, $g(-0,5)>0$ donc $0\in]-\infty\,;g(-0,5)[$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α appartenant à $]-0,5;+\infty[$.

3.b. En utilisant la calculatrice on obtient : $0,25<\alpha<0,26$.

Partie B

1. On admet que f est strictement croissante sur $]-1,5;+\infty[$; remarque : $f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}>0$.

Si $-1\leqslant x\leqslant\alpha$ alors $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(\alpha)$.

$f(-1)=\ln(-2+3)-1=\ln(1)-1=-1$

$g(x)=f(x)-x \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=g(x)+x$

$f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha$ or $g(\alpha)=0$ donc $f(\alpha)=\alpha$

donc si $-1\leqslant x\leqslant\alpha$ alors $-1\leqslant f(x)\leqslant\alpha$.

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $-1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.

<u>Initialisation</u>

$u_0=0$ et pour tout entier naturel n $f(u_n)=u_{n+1}$;

donc $u_1=f(0)=\ln(3)-1=0,10$ à 10^{-2} près et $u_1<\alpha$

et $-1\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant\alpha$.

Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire,pour tout entier naturel n, on suppose que :
$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ et on doit démontrer que : $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.
Si $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ alors $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ soit $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a :
$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

2.b. Pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée et la suite (u_n) est convergente.