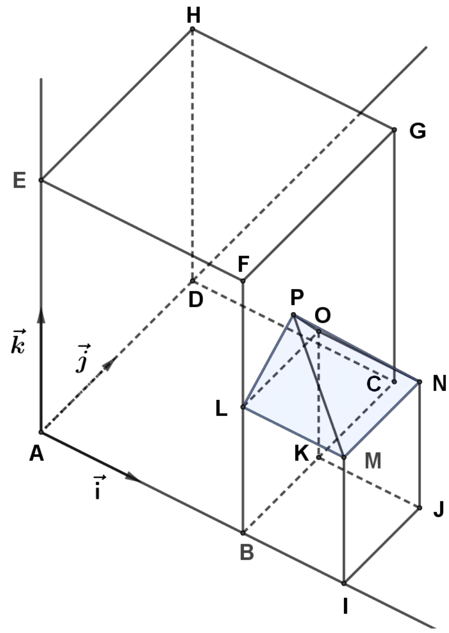
Exercice 3 — 6 points

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.
Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée à un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et est le milieu de segment [BC].
Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ avec $\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1.a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
1.b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).

2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2;\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.

3.a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$
3.b. Calculer la distance PM.
On admet que la distance PN est égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.
3.c. Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut-être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.
Le toit pourra-t-il être construit ?

4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.
Quel est leur point d'intersection ?

CORRECTION

1.a. $H(0;2;2)$ $M(3;0;1)$ $N(3;1;1)$.

1.b. La droite (HM) est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et passant par $H(0;2;2)$.

$$(HM):\begin{cases}x=3t+0\\y=-2t+2\\z=-t+2\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

2. Le plan (BCF) est le plan normal $\vec{i}$ et passant par $B(2;0;0)$.

$R(x;y;z)\in(BCF) \Leftrightarrow \overrightarrow{BR}.\vec{i}=0$ $\quad\overrightarrow{BR}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (x-2)\times1+y\times0+z\times0=0 \Leftrightarrow x-2=0$.

On résout $\begin{cases}x=2\\x=3t\\y=-2t+2\\z=-t+2\end{cases}$ on obtient : $3t=2 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$

donc $x=2$; $y=-\frac{4}{3}+2=\frac{2}{3}$; $z=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$ et $P\left(2;\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.

3.a. $M(3;0;1)$ $N(3;1;1)$ $\quad\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}=1\times1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+(-1\times3)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

3.b. $PM^2=1+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{14}{9}$ $\quad PM=\frac{\sqrt{14}}{3}$

$PN^2=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{11}{9}$ $\quad PN=\frac{\sqrt{11}}{3}$

3.c. $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}=\frac{8}{9}=PM\times PN\times\cos(\widehat{MPN})=\frac{\sqrt{14}\times\sqrt{11}}{9}\times\cos(\widehat{MPN})$

$\cos(\widehat{MPN})=\frac{8}{9}\times\frac{9}{\sqrt{14}\times\sqrt{11}}=\frac{8}{\sqrt{154}}$

$\widehat{MPN}=49{,}9^\circ$ (à 10^{-1} près) $\quad\widehat{MPN}<55^\circ$.

Le toit pourra être construit.

4. $E(0;0;2)$ $N(3;1;1)$ $\quad\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$$(EN):\begin{cases}x=3k+0\\y=k+0\\z=-k+2\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$$

Pour déterminer l'intersection des droites (HM) et (EN), on résout :

$$\begin{cases}3t+0=3k+0\\-2t+2=k+0\\-t+2=-k+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=k\\-2t-k=-2\\-t+k=0\end{cases}$$

$t=k$ et $-3t=-2 \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{2}{3}$

$x=3\times\frac{2}{3}+0=2$; $y=-2\times\frac{2}{3}+2=\frac{2}{3}$; $z=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$.

Le point d'intersection des droites (HM) et (EN) est le point $P\left(;\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.