Exercice 4 — 3 points

Une société de production s'interroge sur l'opportunité de programmer un jeu télévisé.
Ce jeu réunit quatre candidats et se déroule en deux phases :

- La première phase est une phase de qualification.
  Cette phase ne dépend que du hasard. Pour chaque candidat, la probabilité de se qualifier est 0,6.

- La deuxième phase est une compétition entre les candidats qualifiés.
  Elle n'a lieu que si deux candidats au moins sont qualifiés.
  Sa durée dépend du nombre de candidats qualifiés comme l'indique le tableau ci-dessous (lorsqu'il n'y a pas de deuxième phase, on considère que sa durée est nulle).

Nombre de candidats qualifiés pour la deuxième phase	0	1	2	3	4
Durée de la deuxième phase en minutes	0	0	5	9	11

Pour que la société décide de retenir ce jeu, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

Condition n°1 : la deuxième phase doit avoir lieu dans au moins 80 % des cas.

Condition n°2 : la durée moyenne de la deuxième phase ne doit pas excéder 6 minutes.

Le jeu peut-il être retenu ?

CORRECTION

On considère la loi de Bernoulli suivante :
On choisit un candidat au hasard.
Succès S : « le candidat est qualifié en première phase ».
La probabilité de succès est $P(S)=p=0,6$.
Échec $\overline{S}$: « le candidat n'est pas qualifié en première phase ».
La probabilité de l'échec est $P(\overline{S})=q=1-0,6=0,4$
On suppose que le choix des candidats (dans la population) peut-être considéré comme un tirage avec remise.
X est la variable aléatoire égale au nombre de candidats qualifiés après la première phase.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0,6$.
En utilisant la calculatrice, on donne la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.
Les valeurs sont arrondies à 10^{-4}.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0.0256	0.1536	0.3456	0.3456	0.1296

Condition n°1 : il faut que $P(X\geqslant 2)\geqslant 0,8$
$P(X\geqslant 2)=0,3456+0,3456+0,1296=0,8208$
La première condition est vérifiée.
Pour la condition n°2 : on considère la variable aléatoire Y égale à la durée de la deuxième phase.
$P(Y=0)=0,0256+0,1536=0,1792$
$P(Y=5)=P(X=2)=0,3456$
$P(Y=9)=P(X=3)=0,3456$
$P(Y=11)=P(X=4)=0,1296$.
La durée moyenne de la deuxième phase est égale à E(Y).
$E(Y)=5\times 0,3456+9\times 0,3456+11\times 0,1296=6,264>6$.
Le jeu ne sera pas retenu.