Exercice 1 5 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x^2)+x-2$.

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

2. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3.a. Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha)=0$.
3.b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{(x-2)}{x}\ln(x)$.

On pose $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1.a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
1.b. Interpréter graphiquement le résultat.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie C

Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction $\ln$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, $g(x)=\ln(x^2)+x-2$.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ et si $x\neq 0$ alors $x^2>0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^2)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$.

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$.

. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$.

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ $\quad (\ln(x^2))'=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$ et $g'(x)=\frac{2}{x}+1$.

$\frac{2}{x}+1>0$ donc g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3.a. g est dérivable donc continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, à valeurs dans $]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$.

$0\in\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α appartenant à $]0;+\infty[$, c'est à dire qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$.

3.b. En utilisant la calculatrice, on obtient par balayage : $g(1{,}37)<0$ et $g(1{,}38)>0$.

Donc $137<\alpha<1{,}38$.

4. g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Si $0<x<\alpha$ alors $g(x)<g(\alpha)=0$.

Si $\alpha<x$ alors $g(\alpha)=0<g(x)$.

On donne le signe de g(x) sous la forme d'un tableau.

x	0		α		+∞
g(x)	‖	−	0	+	

Partie B

Pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $f(x)=\left(\frac{x-2}{x}\right)\ln(x)$.

1.a. Si $0<x<2$ alors $\frac{x-2}{x}<0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{x-2}{x}\right)=-\infty$ et on a $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$.

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

1.b. La droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3. Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0;+\infty[$

$\left(\frac{x-2}{x}\right)'=\frac{x-(x-2)}{x^2}=\frac{2}{x^2}$ $\qquad (\ln(x))'=\frac{1}{x}$.

$f'(x)=\frac{2}{x^2}\times\ln(x)+\left(\frac{x-2}{x}\right)\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln(x)+x-2}{x^2}$;

Or pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $2\ln(x)=\ln(x^2)$.

Donc $f'(x)=\dfrac{\ln(x^2)+x-2}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

4. Le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	0		α		$+\infty$
f '(x)	||	$-$	0	$+$	
f(x)	|| $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Partie C

On remarque que pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$:

$f(x)=\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln(x)=\ln(x)-\dfrac{2}{x}\ln(x)$.

Donc $f(x)-\ln(x)=-\dfrac{2}{x}\ln(x)$.

Le signe de $f(x)-\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe opposé de ln(x).
Si $0<x<1$ alors $\ln(x)<0$ et $f(x)-\ln(x)>0$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe représentative de ln.
Si $1<x$ alors $0<\ln(x)$ et $f(x)-\ln(x)<0$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la courbe représentative de ln.
Pour $x=1$ alors $f(1)=\ln(1)=0$, les deux courbes sont sécantes au point $I(0;1)$;
On joint une figure non demandée.