

Exercice 2

5 points

Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail utilisant son vélo ou les transports en commun.

S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.

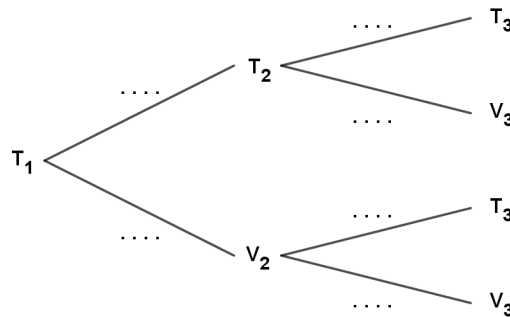
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n , on note :

- . T_n l'événement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le $n^{\text{ième}}$ jour »
- . V_n l'événement « Monsieur Durand utilise son vélo le $n^{\text{ième}}$ jour »
- . On note p_n la probabilité de l'événement T_n .

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'événement T_1 est $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessus représentant la situation les 2^{ème} et 3^{ème} jours.

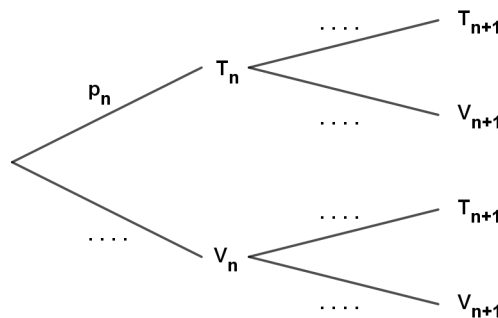


2. Calculer p_3 .

3. Le 3^{ème} jour, Monsieur Durand utilise son vélo.

Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.

4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,6$.

6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.

7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1. Pour tout entier naturel n non nul, les événements T_n et V_n sont contraires.

Si Monsieur Durand choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à $0,8$.

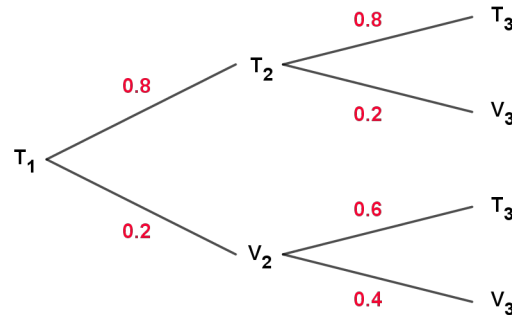
Donc $P_{T_1}(T_2) = P(T_2) = 0,8$ et $P_{T_1}(V_2) = P(V_2) = 1 - P_{T_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$

$P_{T_2}(T_3) = 0,8$ et $P_{T_2}(V_3) = 0,2$.

Si Monsieur Durand utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à $0,4$.

Donc $P_{V_2}(V_3) = 0,4$ et $P_{V_2}(T_3) = 1 - P_{V_2}(V_3) = 1 - 0,4 = 0,6$.

On obtient l'arbre pondéré :



2. En utilisant la formule des probabilités totales.

$$p_3 = P(T_3) = P(T_2 \cap T_3) + P(V_2 \cap T_3) = P(T_2) \times P_{T_2}(T_3) + P(V_2) \times P_{V_2}(T_3)$$

$$p_3 = 0,8 \times 0,8 + 0,2 \times 0,6 = 0,64 + 0,12 = 0,76$$

3. On nous demande de calculer : $P_{V_3}(T_2) = \frac{P(T_2 \cap V_3)}{P(V_3)}$

$$P(V_3) = 1 - P(T_3) = 1 - p_3 = 1 - 0,76 = 0,24 \quad P(V_2 \cap T_3) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$$

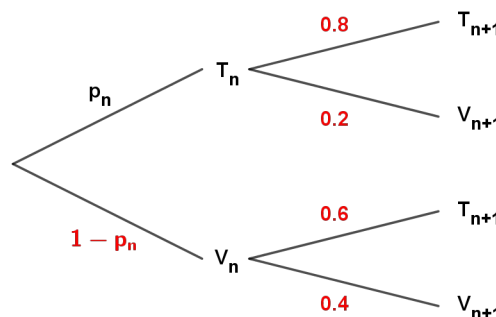
$$P_{V_3}(T_2) = \frac{0,16}{0,24} = \frac{2}{3}$$

4. $P(T_n) = p_n$ $P(V_n) = 1 - p_n$

$$P_{T_n}(T_{n+1}) = 0,8 \quad P_{T_n}(V_{n+1}) = 0,2$$

$$P_{V_n}(T_{n+1}) = 0,6 \quad P_{V_n}(V_{n+1}) = 0,4$$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



5. En utilisant la formule des probabilités totales.

Pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = P(T_n \cap T_{n+1}) + P(V_n \cap T_{n+1}) = P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(T_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,2 p_n + 0,6$$

6. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour entier naturel n non nul, on a :

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}.$$

Initialisation

Pour $n=1$ on a $p_1=1$ et $0,75+0,25 \times 0,2^0 = 0,75+0,25 = 1$.

La propriété est donc vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n non nul, on suppose que :

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1} \text{ et on doit démontrer que : } p_{n+1} = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n.$$

$$\text{Or } p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,6 = 0,2 \times (0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}) = 0,15 + 0,25 \times 0,2^n + 0,6$$

$$p_{n+1} = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n.$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$$

7. $-1 < 0,2 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n-1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,75 = \frac{3}{4}$.

Dans l'avenir Monsieur Durand utilisera les transports en commun pour se rendre au travail 3 jours sur 4.