Exercice 3 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse,une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

1. Une primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\mathrm{e}^x$, est la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $F(x)=\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$
b. $F(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$
c. $F(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$
d. $F(x)=x^2\mathrm{e}^{x^2}$

2. On considère la fonction g définie par : $g(x)=\ln\left(\frac{x-1}{2x+4}\right)$.

La fonction g est définie sur :

a. $\mathbb{R}$
b. $]-2;+\infty[$
c. $]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$
d. $]-2;1[$

3. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$ est :

a. concave sur $\mathbb{R}$
b. convexe sur $\mathbb{R}$
c. concave sur $]-\infty;-3]$ et convexe sur $[-3;+\infty[$.
d. convexe sur $]-\infty;-3]$ et concave sur $[-3;+\infty[$.

4. La suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel L.
On peut affirmer que :

a. $L=3$
b. $L\geqslant 3$
c. la suite (u_n) est décroissante
d. la suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

5. La suite (w_n) est définie par $w_1=2$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $w_{n+1}=\frac{1}{n}w_n$:

a. la suite est géométrique
b. la suite (w_n) n'admet pas de limite
c. $w_5=\frac{1}{5}$
d. la suite converge vers 0

CORRECTION

1. Réponse : b

Preuve non demandée

Il ne peut y avoir des x^2 dans l'écriture de F(x) car il y aurait des x^2 dans les affirmations a et d sont fausses.

Si $F(x)=(x+1)e^x$ alors $F'(x)=1\times e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x\neq f(x)$

Si $F(x)=(x-1)e^x$ alors $F'(x)=1\times e^x+(x-1)e^x=xe^x=f(x)$.

2. Réponse : c

Preuve non demandée

x appartient à l'ensemble de définition de g $\Leftrightarrow$ $\frac{x-1}{2x+4}>0$

Le signe de $\frac{x-1}{2x+4}$ est le signe de $(x-1)(2x+4)$ pour tout réel $x\neq-2$ $(2x+4\neq0)$.

Les racines du trinôme sont 1 et -2 et le coefficient de x^2 est positif donc :

$S=\{]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[\}$

3. Réponse : d

Preuve non demandée

h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h(x)=(x+1)e^x$ $\quad h'(x)=1\times e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$ $\quad h''(x)=1\times e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$

Le signe de $h''(x)$ est le signe de (x+3) sur $\mathbb{R}$.

Si $x\leqslant-3$ alors $h''(x)\leqslant0$ et h est concave sur $]-\infty;-3]$.

Si $x\geqslant-3$ alors $h''(x)\geqslant0$ et h est convexe sur $[-3;+\infty[$.

4. Réponse : b

Preuve non demandée

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=4+(-1)^{n+1}\times\frac{1}{n+1}$

$v_0=3$; $v_1=\frac{9}{2}$; $v_2=\frac{13}{3}$

La suite (v_n) est minorée par 3 et converge vers L=4.

Cette suite n'est pas décroissante et cette suite n'est pas constante à partir d'un certain rang.

Donc les affirmations a ; c ; d sont fausses.

5. Réponse : d

Preuve non demandée

$w_1=2$; $w_2=\frac{1}{1}\times2=2$; $w_3=\frac{1}{2}\times2=1$; $w_4=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2$; ..... $w_n=\frac{2}{(n-1)!}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)!=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$

Remarque :

On peut aussi démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$0\leqslant w_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$