Exercice 4 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points A(-1 ;-3;2) B(3 ;-2;6) C(1;2 ;-4).

1. Démontrer que les points A ; B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.

2.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

2.b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $13x-16y-9z-17=0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $F(15;-16;-8)$ et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

4. On appelle E le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$.
Démontrer que le point E a pour coordonnées (2;0;1).

5. Déterminer la valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$.

6. Déterminer les coordonnées du ou des point(s) de la droite $\mathscr{D}$ dontla distance au plan $\mathscr{P}$ est égale à la moitié de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$.

CORRECTION

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AC}=\lambda.\overrightarrow{AB}$.

Les points A ; B et C sont donc non alignés et définissent un plan $\mathscr{P}$.

2.a. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=13\times4-16\times1-9\times4=52-16-32=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=13\times2-16\times5-9\times(-6)=26-80+54=0$.

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

2.b. M(x;y;z) appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+3\\z-2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\ 13\times(x+1)-16\times(y+3)-9\times(z-2)=0 \ \Leftrightarrow\ 13x+13-16y-48-9z+18=0$

$\Leftrightarrow\ 13x-16y-9z-17=0$.

3. La droite $\mathscr{D}$ est la droite passant par F(15 ;-16 ;-8) est de vecteur directeur $\vec{n}$.

$$\mathscr{D}:\begin{cases}x=13t+15\\y=-16t-16\\z=-9t-8\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

4. Pour déterminer les coordonnées du point E, on résout le système :

$$\begin{cases}13x-16y-9z-17=0\\x=13t+15\\y=-16t-16\\z=-9t-8\end{cases}$$

On obtient : $13(13t+15)-16(-16t+16)-9(-9t-8)-17=0$

$\Leftrightarrow\ 169t+195+256t+256+81t+72-17=0 \ \Leftrightarrow\ 506t+506=0 \ \Leftrightarrow\ t=-1$.

$x=-13+15=2$ $\quad y=16-16=0$ $\quad z=9-8=1$ $\quad E(2;0;1)$

5. La distance du point F au plan $\mathscr{P}$ est la longueur EF.

$EF^2=(15-2)^2+(-16-0)^2+(-8-1)^2=13^2+16^2+9^2=169+256+81=506$ $\quad EF=\sqrt{506}$

6. Il existe deux points de la droite $\mathscr{D}$ dont la distance au plan $\mathscr{P}$ est égale à la moitié de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$: le point M_1 milieu de [EF] et le point M_2 symétrique de M_1 par rapport au plan $\mathscr{P}$ (ou du point E).

$M_1\left(\frac{2+15}{2};\frac{0-16}{2};\frac{1-8}{2}\right)$ $\quad M_1(8,5;-8;-3,5)$

$\overrightarrow{EM_2}=-\overrightarrow{EM_1}$

$M_2(x;y;z)$ $\quad \overrightarrow{EM_2}\begin{pmatrix}x-2\\y-0\\z-1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EM_1}\begin{pmatrix}6,5\\-8\\-4,5\end{pmatrix}$ $\quad -\overrightarrow{EM_1}\begin{pmatrix}-6,5\\8\\4,5\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{EM_2}=-\overrightarrow{EM_1}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x-2=-6,5\\y-0=8\\z-1=4,5\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=-4,5\\y=8\\z=5,5\end{cases}\quad M_2(-4,5;8;5,5)$$