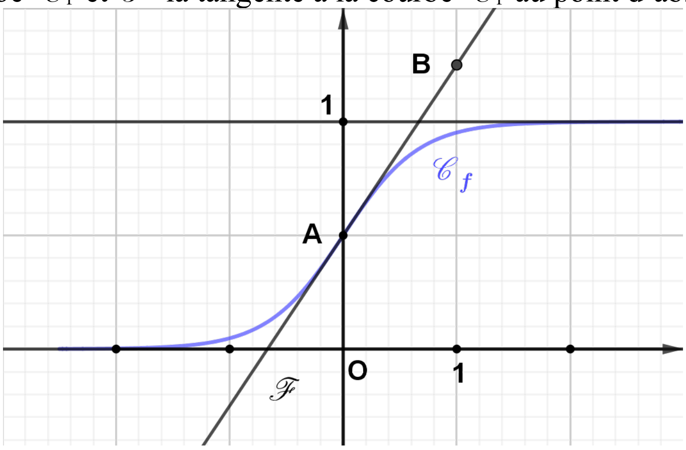
Exercice 1 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{1+e^{-3x}}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1;\frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisses 0.



Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats sont obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.

2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f' .

2. Justifier que la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.a. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.

3.b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.

4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x)=0{,}99$.

Partie C : tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f''(x)=\frac{9e^{-3x}(e^{-3x}-1)}{(1+e^{-3x})^3}$.

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

3.a. Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction est convexe.

3.b. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

3.c. En déduire la position relative de la tangente $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$.
Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A : lectures graphiques

1. L'ordonnée à l'origine de $\mathcal{F}$ est égale à l'ordonnée du point A, soit $\frac{1}{2}$.

Le coefficient directeur de $\mathcal{F}$ est égale à : $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}{1-0}=\frac{3}{4}$.

$\mathcal{F}:\ y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

2. f semble convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction

1. $f(x)=\frac{1}{1+e^{-3x}}$ $\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$

$u(x)=1+e^{-3x}$ $u'(x)=(e^{-3x})'=-3e^{-3x}$

$f'(x)=\frac{-3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$

2. Pour tout nombre réel x, $e^{-3x}>0$ donc $f'(x)>0$.

f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-3x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{1+0}=1$.

La droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3.b. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-3x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

La droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

4. $f(x)=0{,}99 \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-3x}}=0{,}99 \Leftrightarrow 1=0{,}99\times(1+e^{-3x}) \Leftrightarrow 0{,}01=0{,}99e^{-3x} \Leftrightarrow \frac{0{,}01}{0{,}99}=e^{-3x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{99}=e^{-3x}$ (la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$) $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{99}\right)=\ln(e^{-3x})$

$\Leftrightarrow -\ln(99)=-3x \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln(99)=x$ donc $\alpha=\frac{1}{3}\ln(99)$.

Partie C : tangente et convexité

1. $f'(0)=\frac{3e^0}{(1+e^0)^2}=\frac{3}{4}$

$\mathcal{F}:\ y-y_A=f'(0)(x-x_A)$ $\mathcal{F}:\ y-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}(x-0)$ $\mathcal{F}:\ y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

2. Pour tout nombre réel x : $\frac{9e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^3}>0$ donc le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $(e^{-3x}-1)$.

$e^{-3x}-1=0 \Leftrightarrow e^{-3x}=1 \Leftrightarrow -3x=\ln(1)=0 \Leftrightarrow x=0$

$e^{-3x}-1>0 \Leftrightarrow e^{-3x}>1 \Leftrightarrow -3x>\ln(1)=0$ (car lu est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

$\Leftrightarrow x<0$.

$e^{-3x}-1<0 \Leftrightarrow x>0$

On donne le signe de $f''(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f ''(x)		+	0	−	

3.a. f est convexe sur $]-\infty;0]$ car $f''(x)\geqslant 0$ sur $]-\infty;0]$ et $f''(x)\leqslant 0$ sur $[0;+\infty[$.

3.b. f'' s'annule en 0 en changeant de signe donc le point A d'abscisse 0 est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3.c. La courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe sur $]-\infty;0]$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point A sur $]-\infty;0]$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est concave sur $[0;+\infty[$ donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point A sur $[0;+\infty[$.