Exercice 2 — 5 points

Partie A

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x-\ln(1+x)$.

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

2. On admet que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

3.a. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.
3.b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

4.a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$, on a : $f(x)=\ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right)$.

4.b. En déduire la limite de en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n-\ln(1+u_n)$.
On admet que (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1 .

2. En utilisant la question 3.a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n on a : $u_n \geqslant 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. $f(x)=x-\ln(1+x)$

x appartient à l'ensemble de définition de la fonction f si et seulement si $1+x>0 \Leftrightarrow x>-1$.

f est donc définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

2. On admet que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$. Pour nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$: $(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}$.

$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$

3.a. Pour tout nombre réel x appartenant à $]-1;+\infty[$, on a : $1+x>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $]-1;+\infty[$ est le signe de x.

Si $-1<x<0$ alors $f'(x)<0$ et f est strictement décroissante sur $]-1;0[$.

Si $0<x$ alors $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	-1		0		$+\infty$
f '(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖	↘	0	↗	

3.b. $f(0)=0$ f admet 0 pour minimum sur $]-1;+\infty[$ donc f est positive ou nulle sur $]-1;+\infty[$.

On donne le signe de f sous la forme d'un tableau.

x	-1		0		$+\infty$
f(x)	‖	+	0	+	

4.a. Pour tout réel x de l'intervalle $]-1;+\infty[$, on a : $x=\ln(e^x)$ et

$f(x)=\ln(e^x)-\ln(1+x)=\ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right)$.

4.b. $\frac{e^x}{1+x}=\frac{e^x}{x}\times\frac{x}{1+x}$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)=1$ donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{1+x}\right)=+\infty$.

$\lim_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Partie B

1. $u_1=u-0-\ln(1+u_0)=10-\ln(1+10)=10-\ln(11)$.

En utilisant la calculatrice, on obtient comme arrondi au millième : $u_1=7{,}602$.

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant 0$.

<u>Initialisation</u>

$u_0=10\geqslant 0$. La propriété est vérifiée pour $n=0$.

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n\geqslant 0$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\geqslant 0$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

En utilisant le 3.a. de la partie A, f est est croissante sur $[0;+\infty[$ donc si $u_n \geqslant 0$ alors $f(u_n) \geqslant f(0)$ soit $u_{n+1} \geqslant 0$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 0$.

3. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} - u_n = -\ln(1+u_n)$.

Or $u_n \geqslant 0$ donc $1+u_n \geqslant 1$ et $\ln(1+u_n) \geqslant \ln(1) = 0$ (car $\ln$ est croissante sur $]0;+\infty[$).

On obtient : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ soit $u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite (u_n) est décroissante.

4. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente.

5. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ donc $L \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.

$\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(L)$

Donc $f(L) = L \Leftrightarrow L - \ln(1+L) = L \Leftrightarrow 0 = \ln(1+L) \Leftrightarrow \ln(1) = \ln(1+L) \Leftrightarrow 1+L=1$

$\Leftrightarrow L = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés