Exercice 3 *5 points*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points $A(3;0;1)$ $B(2;1;2)$ et $C(-2;-5;1)$.

1. Démontrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés.

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $-x+y-2z+5=0$.

4. On considère le point $S(1;-2;4)$.
Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S est orthogonal au plan (ABC).

5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
Montrer que les coordonnées de H sont (0 ;-1;2).

6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.

7. On considère le cercle $\mathscr{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B.
On appelle $\mathscr{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$.
Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathscr{D}$.

8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathscr{D}$.

CORRECTION

1. $A(3;0;1)$ $B(2;1;2)$ $C(-2;-5;1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-5\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=\lambda.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases}-5=-\lambda\\-5=\lambda\\0=\lambda\end{cases}$.

Il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AC}=\lambda.\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1\times(-5)+1\times(-5)+1\times 0=-5+5=0$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc le triangle ABC est rectangle en A.

3. Pour démontrer que : $-x+y-2z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC), il suffit de vérifier que les coordonnées des points A, B et C sont des solutions de cette équation.

$A(3;0;1)$ $\quad -3+0-2+5=-5+5=0$
$B(2;1;2)$ $\quad -2+1-4+5=-6+6=0$
$C(-2;-5;1)$ $\quad 2-5-2+5=-7+7=0$

4. $\vec{N}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) d'équation cartésienne : $-x+y-2z+5=0$.

(Δ) est la droite passant par S et de vecteur directeur $\vec{N}$.

$S(1;-2{,}4)$ $\quad M(x;y;z)$ $\quad \overrightarrow{SM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z-4\end{pmatrix}$

M appartient à (Δ) si et seulement s'il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{SM}=t.\vec{N}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=-t\\y+2=t\\z-4=-2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x=-t+1\\y=t-2\\z=-2t+4\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

5. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et du plan (ABC), on résout le système : $\begin{cases}-x+y-2z+5=0\\x=-t+1\\y=t-2\\z=-2t+4\end{cases}$.

On obtient : $-(-t+1)+t-2-2\times(-2t+4)+5=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$

$x=-1+1=0$ $\quad y=1-2=-1$ $\quad z=-2+4=2$ $\quad H(0;-1;2)$.

6. $S(1;-2;4)$ $\quad H(0;-1;2)$

$SH^2=(0-1)^2+(-1+2)^2+(2-4)^2=1+1+4=6$ $\quad SH=\sqrt{6}$ (unité de longueur).

7. Pour déterminer l'aire du disque $\mathscr{D}$ il suffit de calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

$r=HB$ $\quad H(0;-1;2)$ $\quad B(2;1;2)$

$HB^2=(2-0)^2+(1+1)^2+(2-2)^2=4+4+0=8$ $\quad HB=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

On note $\mathscr{A}$ l'aire (en unité d'aire) du disque $\mathscr{D}$.

$\mathscr{A}=\pi r^2=8\pi$ (unité d'aire).

8. Le volume du cône de sommet S et de base $\mathscr{D}$ (contenue dans le plan (ABC)) est égale à :

$\mathscr{V}=\dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{3}$ $\quad \mathscr{A}=8\pi$ $\quad \text{hauteur}=SH=\sqrt{6}$ $\quad \mathscr{V}=\dfrac{8\pi\sqrt{6}}{3}$ (unité de volume).