Exercice 1 *5 points*

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

. L'entreprise appelle chaque personne une première fois :

- ➢ la probabilité que la personne ne décroche pas le téléphone est égale à $0{,}6$;
- ➢ si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0{,}3$.

. Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :

- ➢ la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,3 ;
- ➢ si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0{,}2$.

. Si la personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les événements suivants :

D_1 : « la personne décroche au premier appel » ;

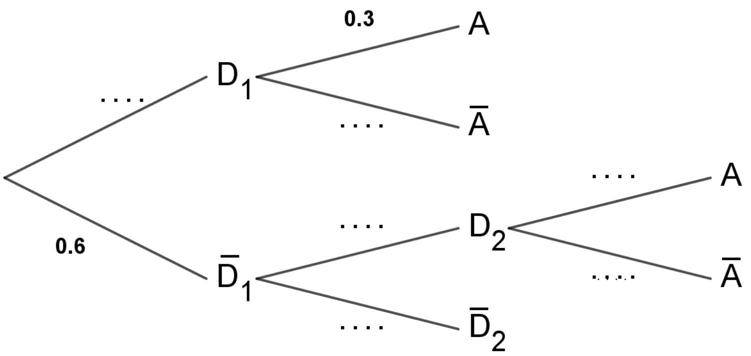
D_2 : « la personne décroche au second appel » ;

A : « la personne achète le produit ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. En utilisant l'arbre pondéré montrer que la probabilité de l'événement A et $P(A)=0{,}204$.

3. On sait que la personne a acheté le produit.
Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel ?

Partie B

On rappelle que pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0{,}204$.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

1.a. On admet que X soit une loi binomiale. Donner, sans justifier, ses paramètres.

1.b. Déterminer la probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achète le produit.
Arrondir le résultat au millième.

1.c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat.

2. Soit n un entier naturel non nul.
On considère désormais un échantillon de n personnes.
Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

CORRECTION

Partie A

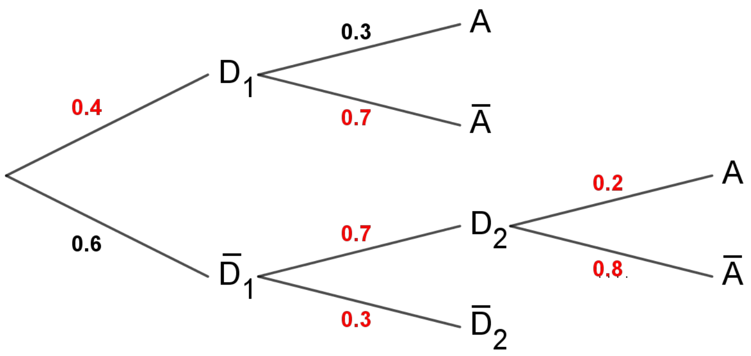
1.a. $P(\bar{D}_1)=0,6$ donc $P(D_1)=1-P(\bar{D}_1)=1-0,6=0,4$

$P_{D_1}(A)=0,3$ donc $P_{D_1}(\bar{A})=1-P_{D_1}(A)=1-0,3=0,7$

$P_{\bar{D}_1}(\bar{D}_2)=0,3$ donc $P_{\bar{D}_1}(D_2)1-0,3=0,7$

$P_{D_2}(A)=0,2$ donc $P_{D_2}(\bar{A})=1-0,2=0,8$

On obtient pour arbre pondéré :



2. En utilisant la formule des probabilités totales.

$P(A)=P(D_1\cap A)+P(\bar{D}_1\cap D_2\cap A)$

$P(D_1\cap A)=P(D_1)\times P_{D_1}(A)=0,4+0,3=0,12$

$P(\bar{D}_1\cap D_2\cap A)=P(\bar{D}_1)\times P_{\bar{D}_1}(D_2\cap A)=P(\bar{D}_1)\times P_{\bar{D}_1}(D_2)\times P_{D_2}(A)$

$P(\bar{D}_1\cap D_2\cap A)=0,6\times 0,7\times 0,2=0,42\times 0,2=0,084$

$P(A)=0,12+0,084=0,204$

3. On nous demande de calculer $P_A(D_1)=\dfrac{P(A\cap D_1)}{P(A)}$.

$P_A(D_1)=\dfrac{0,12}{0,204}=\dfrac{120}{204}=\dfrac{30}{51}\simeq 0,588$.

Partie B

1.a. X suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0,204$.

1.b. $P(X=6)=\binom{30}{6}\ 0,204^6\times 0,796^{24}\simeq 0,179$

1.c. $E(X)=np=30\times 0,204=6,12$.

Si on considère un grand nombre d'échantillons de 30 personnes, en moyenne il y aura 6 personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

2. La probabilité qu'aucune personne, d'un échantillon de n personnes, n'achète le produit est : $0,796^n$ donc la probabilité qu'au moins personne achète le produit est : $1-0,796^n$.

On doit déterminer n tel que : $1-0,796^n\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1-0,99\geqslant 0,796^n \Leftrightarrow 0,01\geqslant 0,796^n$

$\ln$ est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant \ln(0,796^n) \Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant n\times\ln(0,796)$

$0<0,796<1$ donc $\ln(0,796)<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)}\leqslant n$ en utilisant la calculatrice $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)}\simeq 20,12$

$\Leftrightarrow 21\leqslant n$ car n est un entier naturel.

21 est la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une personne, de l'échantillon de n personnes, soit supérieure ou égale à $0,99$.