## Exercice 2 5 points

On considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x)=3x+2x\ln(x)$.
On admet que $f$ est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.
On note $f'$ sa fonction dérivée et $f''$ sa dérivée seconde.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

**1.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en 0 et en $+\infty$.

**2.a.** Démontrer que pour tout réel $x$ strictement positif :
$f'(x)=1-2\ln(x)$.
**2.b.** Étudier le signe de $f'$ et dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

**3.a.** Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. On notera $\alpha$ cette solution.
**3.b.** En déduire le signe de la fonction $f$ sur $]0;+\infty[$.

**4.** On considère une primitive quelconque de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On la note $F$.
Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$ ? Justifier.

**5.a.** Étudier la convexité de la fonction $f$ sur $]0;+\infty[$.
Quelle est la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?
**5.b.** Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
**5.c.** Déduire des questions 5.a. et 5;b. Que pour tout réel $x$ strictement positif : $\ln(x)\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$.

## CORRECTION

**1.** Pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ : $f(x)=3x+1-2x\ln(x)$.

. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

. $x>0$ $\quad f(x)=x\left(3+\frac{1}{x}-2\ln(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2\ln(x))=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

**2.a.** $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ et $(-2x\ln(x))'=-2\ln(x)-2$ donc $f'(x)=3-2\ln(x)-2=1-2\ln(x)$.

**2.b.** $1-2\ln(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln(x)=1 \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$

- $1-2\ln(x)>0 \Leftrightarrow 1>2\ln(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}>\ln(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}}>x$

  car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $1-2\ln(x)<0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}}<x$
- $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=3e^{\frac{1}{2}}+1-2e^{\frac{1}{2}}\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=3e^{\frac{1}{2}}+1-e^{\frac{1}{2}}=2e^{\frac{1}{2}}+1$.
- tableau de variation de $f$.

| x | 0 | | $e^{\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | \|\| | + | 0 | − | |
| f(x) | \|\| 1 | ↗ | $2e^{\frac{1}{2}}+1$ | ↘ | $-\infty$ |

**3.a.** $f$ est croissante sur $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$ donc pour tout nombre réel de cet intervalle $f(x) > 1$ donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

$f$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$ à valeurs dans $\left]-\infty;2e^{\frac{1}{2}}+1\right]$.
$0$ appartient à cet intervalle.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que $0$ admet un unique antécédent par $f$ appartenant à l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$, on note $\alpha$ cet antécédent.
C'est à dire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0;+\infty[$.

**3.b.** Sur $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$ on a $f(x) > 1$ donc $f(x) > 0$.
Sur $\left[e^{\frac{1}{2}};\alpha\right[$ la fonction $f$ est décroissante donc : $e^{\frac{1}{2}}\leqslant x<\alpha \Rightarrow f(x)>f(\alpha)=0$.
Sur $]\alpha;+\infty[$ la fonction $f$ est décroissante donc : $\alpha<x \Rightarrow f(\alpha)=0>f(x)$.
On donne le signe de la fonction $f$ sous la forme d'un tableau.

| x | 0 | | α | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | \|\| | + | 0 | − | |

**4.** $F$ est une primitive de $f$ sur $]0;+\infty[$.
Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, $F'(x)=f(x)$

$\alpha$ appartient à l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$ donc $e^{\frac{1}{2}}<\alpha$.

 

Sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}};\alpha\right[$, f est positive donc F est croissante sur cet intervalle.

On ne peut pas affirmer que F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$.

**5.a.** f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

$f'(x)=1-2\ln(x)$ et $f''(x)=-2\times\frac{1}{x}=-\frac{2}{x}<0$

f est concave sur $]0;+\infty[$.

C'est à dire $\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes sur $]0;+\infty[$.

**5.b.** $f(1)=3+1-0=4$ $f'(1)=1-0=1$ donc T: $y-4=1\times(x-1)$

T: $y=x+3$

**5.c.** $\mathscr{C}_f$ est en dessous de T donc pour tout nombre réel x strictement positif :

$f(x)\leqslant x+3 \Leftrightarrow 3x+1-2x\ln(x)\leqslant x+3 \Leftrightarrow 3x+1-x-3\leqslant 2x\ln(x)$

$\Leftrightarrow 2x-2\leqslant 2x\ln(x) \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}\leqslant\ln(x)$ (car x>0).