Exercice 3 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}n+1$.

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La valeur de u_2 est égale à :

a. $\frac{11}{4}$ **b.** $\frac{13}{2}$

c. 3,5 **d.** 2,7

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-n$, est :

a. arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ **b.** géométrique de raison $\frac{1}{2}$

c. constante **d.** ni arithmétique, ni géométrique

3. On considère la fonction ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python

```
1  def terme(n):
2     U=3
3     for i in range(n):
4  . . . . . . . . . . . . . . .
5     return U
```

n désigne un entier naturel non nul.
On rappelle qu'en langage Python « i range(n) » signifie que i varie de 1 à n-1.
Pour que terme(n) renvoie la valeur de u_n , on peut compléter ligne 4 par :

a. U=U/2+(i+1)/2+1 **b.** U=U/2+n/2+1

c. U=U/2+(i-1)/2+1 **d.** U=U/2+i/2+1

Partie B

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$n\leqslant u_n\leqslant n+3$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

CORRECTION

Partie A

1. Réponse : a

Preuve non demandée

$u_0=3$ pour tout entier naturel n $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}n+1$.

Pour $n=0$ $u_1=\frac{\ }{2}\times 3+\frac{1}{2}\times 0+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

Pour $n=1$ $u_2=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\times 1+1=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{4}$

2. Réponse : b

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-n$

$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}n+1-n-1=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}(u_n-n)=\frac{1}{2}v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. Réponse : d

Preuve non demandée

Pour la boucle de la valeur $i=0$ on obtient u_1

Pour la boucle de la valeur $i=n-1$ on obtient u_n .

Partie B

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $n\leqslant u_n\leqslant n+3$.

Initialisation

Pour $n=0$ on a $u_0=3$ donc $0\leqslant u_0\leqslant 0+3$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n on suppose que : $n\leqslant u_n\leqslant n+3$ et on doit démontrer que $n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+4$.

Si $n\leqslant u_n\leqslant n+3$ alors $\frac{1}{2}n\leqslant\frac{1}{2}u_n\leqslant\frac{1}{2}(n+3)$ et $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n\leqslant\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}n\leqslant\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}n$

Soit $n\leqslant\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}n\leqslant n+\frac{3}{2}$ puis on obtient $n+1\leqslant\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}n+1\leqslant n+\frac{3}{2}+1$ en remarquant que $\frac{3}{2}+1\leqslant 4$

on a $n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+4$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $n\leqslant u_n\leqslant n+3$.

2. Pour tout entier naturel n : $n\leqslant u_n$.

$\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

3. Pour tout entier naturel non nul n, $n\leqslant u_n\leqslant n+3$ donc $\frac{n}{n}\leqslant\frac{u_n}{n}\leqslant\frac{n+3}{n}$ $\Leftrightarrow$ $1\leqslant\frac{u_n}{n}\leqslant 1+\frac{3}{n}$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$. Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=1$