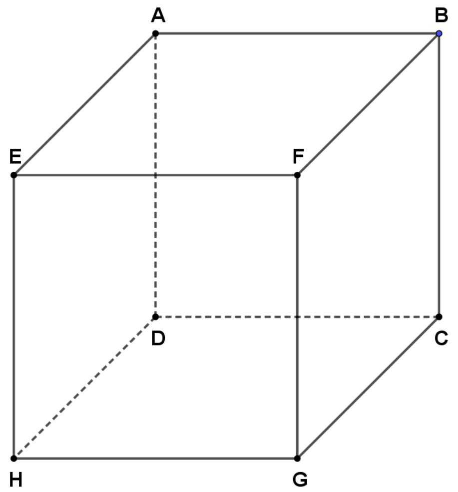
Exercice 4 — 5 points

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que AB=1.
On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé $\left(D;\overrightarrow{DH};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$.

1. Donner sans justifier les coordonnées de F et C.

2. Calculer les coordonnées des points M et N.

3.a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC).
3.b. En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (AG).

5. Démontrer que le point R de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC).

6. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est : $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

Démontrer qu'il existe un unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

7. Quelle fraction du volume du cube ABCDEFGH le volume du tétraèdre FNKM représente-t-il ?

CORRECTION

1. $F(1;1;1)$ $C(0;1;1)$

2. M est le milieu de [FC] $M\left(\frac{1+0}{2};\frac{1+1}{2};\frac{1+0}{2}\right)$ $M\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$

N est le milieu de [FH] $H(1;0;0)$ $N\left(\frac{1+1}{2};\frac{1+0}{2};\frac{1+0}{2}\right)$ $N\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

3.a. $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (HCF) si et seulement si $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (HFC) par exemple : $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FH}$.

$A(1;0;0)$ $C(0;1;0)$ $F(1;1;1)$ $H(1;0;0)$ $G(1;1;0)$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FC}=1\times(-1)+1\times 0+(-1)\times(-1)=-1+0+1=0$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FH}=1\times 0+1\times(-1)+(-1)\times(-1)=0-1+1=0$

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC).

3.b. Le point M(x;y;z) appartient au plan (HFC) si et seulement si $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FM}=0$.

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FM}=0 \Leftrightarrow 1\times(x-1)+1\times(y-1)-1\times(z-1)=0 \Leftrightarrow x-1+y-1-z+1=0$

$\Leftrightarrow x+y-z-1=0$

(HFC): $x+y-z-1=0$

4. (AG) est la droite passant par le point $A(0;0;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$;

(AG) : $\begin{cases}x=1\times k+0\\y=1\times k+0\\z=-1\times k+1\end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$

5. Le projeté orthogonal R du point G sur le plan (HFC) est le point d'intersection du plan (HFC) et de la droite (AG).

On résout le système :

$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x=k\\y=k\\z=-k+1\end{cases}$ on obtient : $k+k-(k+1)-1=0 \Leftrightarrow 3k-2=0 \Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$

$x=\frac{2}{3}$ $y=\frac{2}{3}$ $z=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$ $R\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

6. (FG) : $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

Les coordonnées d'un point K de la droite (FG) sont $K(1;1;t)$.

Le triangle KMN est rectangle en K si et seulement si $\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{KN}=0$

$K(1;1;t)$ $M\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$ $N\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}-t\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KN}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-t\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{KN}=-\frac{1}{2}\times 0+0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-t\right)\times\left(\frac{1}{2}-t\right)=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2$

$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{KN}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}-t\right)^2=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

L'unique point K de la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K et le point $K\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$ c'est à dire le milieu de [FG].

7. Le volume du cube $ABCDEFGH$ est 1 (unité de volume).

$\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KN}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

On remarque que : $\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{FK}=0$ et $\overrightarrow{KN}.\overrightarrow{FK}=0$ c'est à dire FK est la hauteur du tétraèdre FNKM associée à la face MNK.

$KM^2=\frac{1}{4}$ donc $KM=\frac{1}{2}$ $KN^2=\frac{1}{4}$ donc $KN=\frac{1}{2}$ $FK^2=\frac{1}{4}$ donc $FK=\frac{1}{2}$

L'aire du triangle rectangle MNK en K est égale à :

$A_{MNK}=\frac{1}{2}\times KM\times KN=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ (unité d'aire).

Le volume du tétraèdre FNKM est égal à :

$V=\frac{1}{3}\times A_{MNK}\times FK=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{48}$ (unité de volume).

La fraction du volume du cube $ABCDEFGH$ du tétraèdre FNKM est $\frac{1}{48}$.

<u>Figure non demandée</u>