Exercice 1 — 5 points

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.
On suppose que chaque clients achète un seul matelas.
On dispose des informations suivantes :

. 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
  Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.
. 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

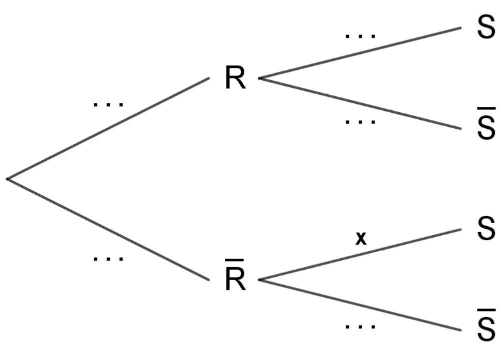
Partie A

On choisit au hasard un client et on note les événements :

. R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
. S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\bar{R}}(S)$ où $P_{\bar{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous décrivant la situation.



2. Démontrer que $x = 0{,}8$.

3. On choisit un client satisfait de son achat.
Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?
On arrondira le résultat à 10^{-2} .

Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard.
On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat.

1.a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.

1.b. Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
On arrondira le résultat à 10^{-3} .

2. Soit n un entier naturel non nul.
On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut-être assimilé à un tirage au sort avec remise.

2.a. On note p_n la probabilité que leur clients soient tous satisfaits de leur achat.
Démontrer que $p_n = 0{,}82^n$.

2.b. Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0{,}01$.
Interprétation dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

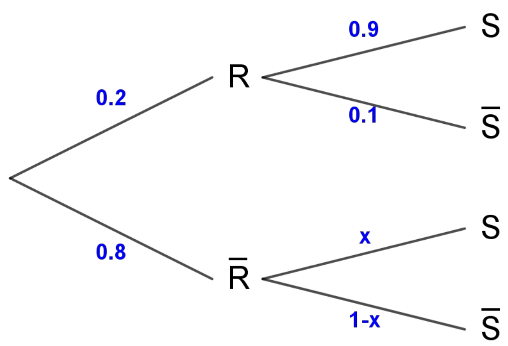
1. L'énoncé précise :

. 20 % des clients achètent le matelas RESSORTS donc $P(R)=0,2$ et $P(\bar{R})=1-0,2=0,8$.

. Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat donc $P_R(S)=0,9$ et $P_R(\bar{S})=1-0,9=0,1$

. $P_{\bar{R}}(S)=x$ et $P_{\bar{R}}(\bar{S})=1-x$

. On obtient :



2. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(S)=P(R\cap S)+P(\bar{R}\cap S)$

$P(R\cap S)=P(R)\times P_R(S)=0,2\times 0,9=0,18$

$P(\bar{R}\cap S)=P(\bar{R})\times P_{\bar{R}}(S)=0,8\times x=0,8x$

$P(S)=0,18+0,8x$

L'énoncé précise que : $P(S)=0,82$.

$0,82=0,18+0,8x \quad \Leftrightarrow \quad 0,64=0,8x \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{0,64}{0,8}=0,8$

et $P_{\bar{R}}(\bar{S})=1-0,8=0,2$

3. On nous demande de calculer $P_S(R)$

$P_S(R)=\dfrac{P(S\cap R)}{P(S)}=\dfrac{0,18}{0,82}\simeq 0,22$ arrondi à 10^{-2}.

Partie B

1.a. X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,82$.

1.b. En utilisant la calculatrice : $P(X\leqslant 3)=0,222$ arrondi à 10^{-3}.

2.a. La probabilité qu'un client soit satisfait est : 0,82 donc la probabilité que les n clients sont satisfaits est : $p_n=0,82^n$.

2.b. $p_n<0,01 \quad \Leftrightarrow \quad 0,82^n<0,01$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\Leftrightarrow \quad \ln(0,82^n)<\ln(0,01) \quad \Leftrightarrow \quad n\times\ln(0,82)<\ln(0,01)$

$0<0,82<1$ donc $\ln(0,82)<0$

$\Leftrightarrow \quad n>\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,82)}\simeq 23,2$

n est un entier naturel

$\Leftrightarrow \quad n\geqslant 24$

Si on choisit au hasardun échantillon de clients de taille supérieure ou égale à 24 alors la probabilité que tous les clients de l'échantillon soient satisfaits est strictement inférieure à 0,01.