Exercice 2 — 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{6u_n+2}{u_n+5}$.

1. Calculer u_1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{6x+2}{x+5}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=f(u_n)$.

2.a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
En déduire que pour tout réel $x>2$, on a $f(x)>2$.

2.b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n>2$.

3. On admet que, pour entier naturel n,on a : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}$.

3.a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

3.b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n par : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$.

4.a. Calculer v_0.

4.b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.

4.c. Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n).
En déduire, la limite de la suite (u_n).

5. On considère la fonction Python seuil ci-dessous, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

```
def seuil(A):
  n=0
  u=8
  while u>A:
    u=(6*u+2=/(u+5)
    n=n+1
  return n
```

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil(2,001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1. $u_1=\dfrac{6u_0}{u_0+5}=\dfrac{6\times 8+2}{8+5}=\dfrac{50}{13}$.

2. f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{6x+2}{x+5}$.

2.a. f est dérivable sur $[0;+\infty[$, $(6x+2)'=6$ et $(x+5)'=1$.

$f'(x)=\dfrac{6\times(x+5)-(6x+2)\times 1}{(x+5)^2}=\dfrac{30-2}{(x+5)^2}=\dfrac{28}{(x+5)^2}>0$

donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Si $x>2$ alors $f(x)>f(2)=2$.

2.b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n>2$.

Initialisation

$u_0=8>2$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n>2$ et on doit démontrer que $u_{n+1}>2$.

Or pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$ et f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc : si $u_n>2$ et $f(u_n)>f(2)$ soit $u_{n+1}>2$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n>2$.

3. On admet que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}$.

3.a. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n>2$ donc $2-u_n<0$ et $u_n+1>0$ et $u_n+5>0$ donc : $u_{n+1}-u_n<0$ et la suite (u_n) est décroissante.

3.b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2 donc la suite (u_n) est convergente.

4. Pour tout entier naturel n, $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$.

4.a. $v_0=\dfrac{u_0-2}{u_0+1}=\dfrac{8-2}{8+1}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$.

4.b. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1}$

$$u_{n+1}-2=\frac{6u_n+2}{u_n+5}-2=\frac{6u_n+2-2u_n-10}{u_n+5}=\frac{4u_n-8}{u_n+5}=\frac{4(u_n-2)}{u_n+5}$$

$$u_{n+1}+1=\frac{6u_n+2}{u_n+5}+1=\frac{6u_n+2+u_n+5}{u_n+5}=\frac{7u_n+7}{u_n+5}=\frac{7(u_n+1)}{u_n+5}$$

$$v_{n+1}=\frac{4(u_n-2)}{u_n+5}:\frac{7(u_n+1)}{u_n+5}=\frac{4(u_n-2)}{u_n+5}\times\frac{u_n+5}{7(u_n+1)}=\frac{4}{7}\left(\frac{u_n-2}{u_n+1}\right)=\frac{4}{7}v_n$$

donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison : $\dfrac{4}{7}$.

4.c. $v_0=\dfrac{2}{3}$, pour tout entier natyrel n, on a : $v_n=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{4}{7}\right)^n$.

$0<\dfrac{4}{7}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

$v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1} \Leftrightarrow u_n(u_n+1)=u_n-2 \Leftrightarrow u_n v_n+v_n=u_n-2 \Leftrightarrow u_n v_n-u_n=-v_n-2$

$\Leftrightarrow \quad u_n(v_n-1)=-v_n-2 \quad \Leftrightarrow \quad u_n=\dfrac{-v_n-2}{v_n-1}=\dfrac{v_n+2}{1-v_n}$;

On peut vérifier que la suite (v_n) est décroissante donc pour tout entier naturel n, on a :

$v_n<\dfrac{2}{3}<1$ donc $1-v_n\neq 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{0+2}{1-0}=2$

5. Si on exécute le programme Python on obtient $n=14$.

. Si on programme la fonction f sur la calculatrice $f(u_0)=u_1$; $f(u_1)=u_2$ ... on réitère 14 fois et on obtient $u_{14}\simeq 2{,}00079$ et $u_{13}>2{,}001$ donc $n=14$.

. Par écriture de u_n en fonction de n.

$u_n=\dfrac{v_n+2}{1-v_n} \qquad v_n=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{4}{7}\right)^n$

$u_n\leqslant 2{,}001 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{4}{7}\right)^n+2\leqslant 2{,}001\times\left(1-\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{4}{7}\right)^n\right) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{4}{7}\right)^n\times 3{,}001\leqslant 0{,}001$

ln est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left[\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{4}{7}\right)^n\times 3{,}001\right]\leqslant \ln(0{,}001) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\dfrac{2}{3}\times 3{,}001\right)+\ln\left[\left(\dfrac{4}{7}\right)^n\right]\leqslant \ln(0{,}001)$

$\Leftrightarrow \quad n\times\ln\left(\dfrac{4}{7}\right)\leqslant \ln(0{,}001)-\ln\left(\dfrac{2}{3}\times 3{,}001\right)$

$0<\dfrac{4}{7}<1$ donc $\ln\left(\dfrac{4}{7}\right)<0$

$\Leftrightarrow \quad n\geqslant\dfrac{\ln(0{,}001)-\ln\left(\dfrac{2}{3}\times 3{,}001\right)}{\ln\left(\dfrac{4}{7}\right)}\simeq 13{,}58 \quad \Leftrightarrow \quad n\geqslant 14$

<u>Interprétation</u>

u_{14} est le premier terme de la suite (u_n) inférieur ou égal à 2,001.