Exercice 3 — 5 points

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère le point $A(1;1;0)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+4y+2z+1=0$.

1. On note (d) la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.
Déterminer une représentation paramétrique de (d).

2. Justifier que la droite (d) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point B dont les coordonnées sont $(1;-1;1)$.

3. On considère le point $C(1;-1;-1)$.
3.a. Vérifier que les points A ; B et C définissent bien un plan.
3.b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
3.c. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

4.a. Justifier que le triangle ABC est isocèle en A.
4.b. Soit H le milieu du segment [BC].
Calculer AH puis l'aire du triangle ABC.

5. Soit D le point de coordonnées $(0;-1;1)$.
5.a. Montrer que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.
5.b. Déduire des questions précédentes le volume de la pyramide ABCD.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par :
$V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

CORRECTION

1. (d) est la droite passant par $A(1;1;0)$ est de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z)$ appartient à la droite (d) si et seulement s'il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t.\vec{u}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0\times t \\ y-1=2\times t \\ z-0=-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (d): \begin{cases} x=1 \\ y=2t+1 \\ z=-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

2. On résout le système :

$\begin{cases} x+4y+2z+1=0 \\ x=1 \\ y=2t+1 \\ z=-t \end{cases}$ on obtient $1+4\times(2t+1)+2\times(-t)+1=0 \Leftrightarrow 6t+6=0 \Leftrightarrow t=-1$

et $x=1$ et $y=2\times(-1)+1=-1$ et $z=1$.

le plan $\mathscr{P}$ et la droite (d) sont sécants et leur point d'intersection et le point $B(1;-1;1)$.

3.a. $A(1;1;0)$ $B(1;-1;1)$ $C(1;-1;-1)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A ; B et C ne sont pas alignés donc les points A ; B et C définissent un plan.

3.b. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\times1-2\times0+1\times0=0$

$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\times1-2\times0-1\times0=0$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3.c. $M(x;y;z)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow (x-1)\times1+(y-1)\times0+z\times0=0 \Leftrightarrow x-1=0$

4.a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$AB^2=0+4+1=5$ $AB=\sqrt{5}$

$AC^2=0+4+1=5$ $AC=\sqrt{5}$

donc $AB=AC$ et le triangle ABC est isocèle en A.

4.c. $B(1;-1;1)$ $C(1;-1;-1)$ $H\left(\frac{1+1}{2};\frac{-1-1}{2};\frac{1-1}{2}\right)$ $H(1;-1;0)$

(AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A.

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ $AH^2=4$ $AH=2$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ $BC^2=4$ $BC=2$.

$\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$ (unité d'aire).

5.a. $A(1;1;0)$ $B(1;-1;1)$ $C(1;-1;-1)$ $D(0;-1;1)$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BD}=-\vec{n}$.

$\vec{n}$ est normal au plan (ABC) et (BD) est la hauteur de la pyramide ABCD issue de D.

$V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ $\mathscr{B}=\mathscr{A}_{ABC}=2$ $h=BD=1$

$V=\frac{1}{3}\times 2\times 1=\frac{2}{3}$ (unité de volume).