Exercice 4 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2xe^x$.

Le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-\frac{73}{100}$ est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** une infinité

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{x+1}{e^x}$.

La limite de la fonction g en $-\infty$ est égale à :

a. $-\infty$ **b.** $+\infty$ **c.** 0 **d.** elle n'existe pas

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(4x-16)e^{2x}$.
On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère orthogonal.
On peut affirmer que :

a. h est convexe sur $\mathbb{R}$
b. $\mathscr{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x=3$
c. h est concave sur $\mathbb{R}$
d. $\mathscr{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x=3,5$

4. On considère la fonction k définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $k(x)=3\ln(x)-x$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de k dans un repère orthonormé.
On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=e$.
Une équation de T est :

a. $y=(3-e)x$
b. $y=\left(\frac{3-e}{e}\right)x$
c. $\left(\frac{3}{e}-1\right)x+1$
d. $y=(e-1)x+1$

5. On considère l'équation $[\ln(x)]^2-10\ln(x)+21=0$ avec $x\in]0;+\infty[$.
Le nombre de solutions de cette équation est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** une infinité

CORRECTION

1. Réponse : c

Preuve non demandée

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x)=2e^x+2xe^x=2(x+1)e^x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	0	$\searrow$	$\frac{-2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

f admet pour minimum : $-\frac{2}{e}\simeq 0{,}736$ arrondi au millième.

$-0{,}73>-0{,}736$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=-0{,}73$ admet deux solutions, l'une inférieure à -1, l'autre supérieure à -1.

2. Réponse : a

Preuve non demandée

$g(x)=(x+1)e^{-x} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

3. Réponse : b

Preuve non demandée

$h(x)=(4x-16)e^{2x} \quad h'(x)=4e^{2x}+(8x-32)e^{2x}=(8x-28)e^{2x}$

$h''(x)=8e^{2x}+(16x-56)e^{2x}=(16x-48)e^{2x}=16(x-3)e^{2x}$

La fonction dérivée seconde de h est nulle pour $x=3$ en changeant de signe donc le point d'abscisse 3 de $\mathscr{C}_h$ est un point d'inflexion.

4. Réponse : b

Preuve non demandée

$k(x)=3\ln(x)-x$ et $k(e)=3-e$

$k'(x)=\frac{3}{x}-x$ et $k'(x)=\frac{3}{e}-1=\frac{3-e}{e}$

Équation réduite de T :

$$y-(3-e)=\left(\frac{3-e}{e}\right)(x-e) \Leftrightarrow y=\left(\frac{3-e}{e}\right)x-(3-e)+(3-e) \Leftrightarrow y=\left(\frac{3-e}{e}\right)x$$

5. Réponse : c

Preuve non demandée

$$[\ln(x)]^2+10\ln(x)+21=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\ln(x) \\ X^2+10X+21=0 \end{cases}$$

$X^2+10X+21=0 \quad \Delta=10^2-4\times 21=16=4^2$

$X_1=\frac{-10+4}{2}=-3$ et $X_2=\frac{-10-4}{2}=-7$

$\ln(x)=X_1=-3 \Leftrightarrow x_1=e^{-3}$

$\ln(x)=X_2=-7 \Leftrightarrow x_2=e^{-7}$

$S=\{e^{-3};e^{-7}\}$

