Exercice 2 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points :
$A(1;0;-1)$ $B(3;-1;2)$ $C(2;-2;-1)$ et $D(4;-1;-2)$

On note Δ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2+t \\ z = -1+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1.a. Montrer que les points A ; B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.
1.b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
Sur le plan $\mathscr{P}$, que représente le point C par rapport à D.
1.c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2x+y-z-3=0$.

2.a. Calculer la distance CD.
2.b. Existe-t-il un point M du plan $\mathscr{P}$ différent de C vérifiant $MD=\sqrt{6}$?
Justifier la réponse.

3.a. Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
Soit H le projeté orthogonal du point sur la droite Δ.
3.b. Montrer que H est le point de Δ associée à la valeur $t=-2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.
3.c. En déduire la distance du point D à la droite Δ.

CORRECTION

1.a. $A(1;0;-1)$ $B(3;-1;2)$ $C(2;-2;-1)$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

Il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\vec{AC}=\lambda.\vec{AB}$ donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés donc les points A,B et C définissent un plan $\mathscr{P}$=(ABC).

1.b. $C(2;-2;-1)$ $D(4;-1;-2)$ $\vec{CD}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{CD}.\vec{AB}=2\times 2+1\times(-1)-1\times 3=4-1-3=0$
$\vec{CD}.\vec{AC}=2\times 1+1\times(-2)-1\times 0=2-2=0$.

Le vecteur $\vec{CD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ donc le vecteur $\vec{CD}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ et la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

1.c. $M(x;y;z)$ $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z+1\end{pmatrix}$ $\vec{CD}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

M appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{AM}.\vec{CD}=0$ $\Leftrightarrow$ $(x-1)\times 2+(y-0)\times 1+(z+1)\times(-1)=0$
$\Leftrightarrow$ $2x-2+y-z-1=0$ $\Leftrightarrow$ $2x+y-z-3=0$

2.a. $CD^2=2^2+1^2+(-1)^2=4+1+1=6$ $CD=\sqrt{6}$

2.b. Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ distinct de C, la droite (CD) est orthogonale à la droite (CM) car (CD) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ donc orthogonale à toute droite contenue dans le plan $\mathscr{P}$.
Le triangle CDM est rectangle en D.
En utilisant le rhéorème de Pythagore :
$DM^2=CD^2+CM^2$ or $CD^2=6$ et $CM^2>0$ car $C\neq M$ donc $DM^2>6$ et $DM>\sqrt{6}$.
Il n'existe pas de point M distinct de C tel que $CM=\sqrt{6}$.

3.a. Pour tout point M appartenant à Δ il existe un nombre réel t tel que $M(0;2+t;-1+t)$ et on a : $2\times 0+2+t-(-1+t)-3=2+t+1-t-3=0.t+0=0$ donc le point M appartient au plan $\mathscr{P}$.
La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

3.b. $H(0;2+t;-1+t)$ est un point de Δ. $D(4;-1;-2)$ $\vec{DH}\begin{pmatrix}-4\\3+t\\1+t\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ.

H est le projeté orthogonal de D sur Δ si et seulement si $\vec{DM}.\vec{u}=0$
$\Leftrightarrow$ $-4\times 0+1\times(3+t)+1\times(1+t)=0$ $\Leftrightarrow$ $2t+4=0$ $\Leftrightarrow$ $t=-2$.
Le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ est le point $H(0;0;-3)$.

3.c. La distance du point D à la droite Δ est DH.
$DH^2=(0-4)^2+(0+1)^2+(-3+2)^2=16+1+1=18$
$DH=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$