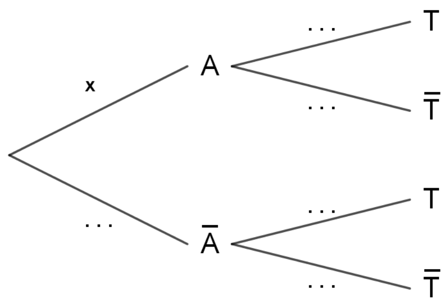
Exercice 3 — 4 points

*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*
Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.
Dans une population, ce test donne les résultats suivants :
. Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas ;
. Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.
Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.
On choisit au hasard un individu dans la population et on note :
. A l'événement : « l'individu est allergique » ;
. T l'événement : « l'individu présente un test positif ».
On notera $\overline{A}$ et $\overline{T}$ les événements contraires de A et T.
On appelle par ailleurs x la probabilité de l'événement A : $x=P(A)$.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous décrivant la situation en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



2.a. Démontrer l'égalité : $P(T)=0{,}927x+0{,}043$.
2.b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique ».
3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».

Partie B

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,08.
On note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe, le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
Préciser ses paramètres.

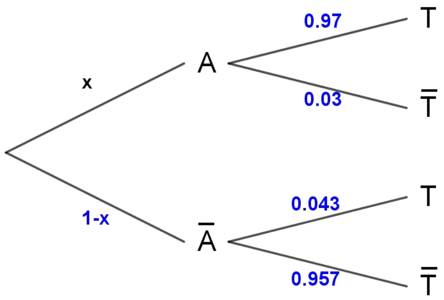
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.

3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

CORRECTION

Partie A

1. $x = P(A)$ donc $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - x$.
L'énoncé précise :
si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas.
$P_A(T) = 0{,}97$ et $P_A(\bar{T}) = 1 - P_A(T) = 1 - 097 = 0{,}03$
si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.
$P_{\bar{A}}(\bar{T}) = 0{,}957$ et $P_{\bar{A}}(T) = 1 - P_{\bar{A}}(\bar{T}) = 1 - 0{,}957 = 0{,}043$.
On obtient pour arbre pondéré décrivant la situation :



2.a. En utilisant la formule des probabilités totales ;
$P(T) = P(A \cap T) + P(\bar{A} \cap T)$
$P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = x \times 0{,}97$ $\quad$ $P(\bar{A} \cap T) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(T) = (1 - x) \times 0{,}043$
$P(T) = 0{,}97x + 0{,}043 - 0{,}043x = 0{,}927x + 0{,}043$.

2.b. L'énoncé précise que 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif donc $P(T) = 0{,}20$.
Et $0{,}2 = 0{,}927x + 0{,}043 \Leftrightarrow 0{,}2 - 0{,}043 = 0{,}927x \Leftrightarrow 0{,}157 = 0{,}927x$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{0{,}157}{0{,}927} \simeq 0{,}169$ **à 10^{-3} près.**

3. On calcule $P_T(A) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)}$.
$P(A \cap T) = 0{,}97 \times 0{,}169$
$P_T(A) = \dfrac{0{,}97 \times 0{,}169}{0{,}2} \simeq 0{,}820$ à 10^{-3} près.
Si le test est positif, il y a environ 82 % > 80 % de chances que la personne soit allergique.

Partie B

1. On choisit au hasard 150 habitants de cette ville, on suppose que les tirages successifs sont indépendants et avec remise.
On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
on choisit au hasard un habitant de cette ville, le succès est S=A : « cette personne est allergique »
$P(S) = 0{,}08$ et $P(\bar{S}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 150 épreuves, sa loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}08$.

2. $P(X = 20) = \dbinom{150}{20} 0{,}08^{20} \times 0{,}92^{130} \simeq 0{,}008$.

3. On nous demande de calculer $P(X \geqslant 15)$.
En utilisant la calculatrice on obtient :
$P(X \geqslant 15) \simeq 0{,}220$