Exercice 4 7 points

Partie A

On définit sur l'intervalle $\mathrm{I}=]0;+\infty[$, la fonction g par : $g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln(x)$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathrm{I}=]0;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x>0$, le signe de $g'(x)$ est celui dun trinôme du second degré (x^2-2x+2) .

2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0{,}5;1]$, que l'on notera α .

4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $\mathrm{I}=]0;+\infty[$.

x	0		α		+∞
g(x)	‖	−	0	+	

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=]0;+\infty[$ par : $f(x)=e^x\ln(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, on note f' da fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que : pour tout nombre réel $x>0$, $f'(x)=e^x\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)$.

Démontrer que, pour tout nombre réel x>0, on a $f''(x)=e^x\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln(x)\right)$.

2. On pourra remarquer que pour tout nombre réel $x>0$, $f''(x)=e^x\times g(x)$ où g est la fonction étudiée dans la partie A.

3.a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'' sur $]0;+\infty[$. Justifier.
3.b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion A.
3.c. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Justifier.

4.a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4.b. Montrer que $f'(\alpha)=\frac{e^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation de l'équation $g(x)=0$.
4.c. Démontrer que $f'(\alpha)>0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.
4.d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $\left(\frac{2}{x}\right)'=-\frac{2}{x^2}$ $\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3}$ $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$

donc $g'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}=\frac{-2x+2+x^2}{x^3}=\frac{x^2-2x+2}{x^3}$

$x^3>0$ car x appartient à $]0;+\infty[$, donc le signe g'(x) sur $]0;+\infty[$ est le signe du trinôme (x^2+2x+2) .

2. On remarque : $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ donc pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, $x^2+2x+2\geqslant 1>0$.
Conséquence : g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3. $g(1)=2-1+0=1>0$ $g(0,5)=\frac{2}{0,5}-\frac{1}{0,25}+\ln(0,5)=4-4+\ln(0,5)=\ln(0,5)$ $\ln(0,5)\simeq-0,69$

donc $g(0,5)<0$.

g est continue et strictement croissante sur [0,5;1] à valeurs dans [g(0,5);g(1)], 0 appartient à [g(0,5);g(1)], le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α appartenant à l'intervalle $[0,5;1]$ c'est à dire l'équation g(x)=0 admet une unique solution α appartenant à [0,5;1].

4. $g(\alpha)=0$ et g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
si $0<x<\alpha$ alors $g(x)<g(\alpha)=0$
si $\alpha<x$ alors $g(\alpha)=0<g(x)$.
On obtient bien les signes de g(x) donnés dans le tableau.

Partie B

1. Pour tout nombre réel $x>0$, $f(x)=e^x\ln(x)$ et $f'(x)=e^x\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)$.

$(e^x)'=e^x$ $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$

donc $f''(x)=e^x\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)+e^x\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=e^x\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\ln(x)\right)$.

2. Or $g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln(x)$ donc $f''(x)=e^x\times g(x)$.

3.a. Pour tout nombre réel $x>0$, on a donc le signe de $f''(x)$ est le signe de $g(x)$.

x	0		α		+∞
f ''(x)	‖	–	0	+	

3.b. $f''(x)$ ne s'annule qu'une seule fois en α en changeant de signe donc $\mathscr{C}_f$ admet un seul point d'inflexion A d'abscisse α .

3.c. Si $0<x\leqslant\alpha$ alors $f''(x)\leqslant 0$ donc f est concave sur $]0;\alpha]$.
Si $\alpha\leqslant x$ alors $f''(x)\geqslant 0$ donc f est convexe sur $[\alpha;+\infty[$.

4.a. $f(x)=e^x\ln(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^x=e^0$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x)=-\infty$ donc $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=-\infty$.

$\lim_{x\to x:+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4.b. $f'(\alpha)=e^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}+\ln(\alpha)\right)$.

Or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}+\ln(\alpha)=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}$

$f'(\alpha)=e^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}\right)=e^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{e^{\alpha}}{\alpha^2}(1-\alpha)$.

4.c. $0{,}5<\alpha<1$ donc $1-\alpha>0$ et $\frac{e^{\alpha}}{\alpha^2}>0$ on obtient $f'(\alpha)>0$.

f'' est la fonction dérivée de f'. On a déterminé le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$.

f' est décroissante sur $]0;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$ donc f' admet un minimum absolu en α or $f'(\alpha)>0$ donc pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x)>0$.

4.d. f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variations de f.

x	0	$+\infty$
f '(x)	‖ +	
f(x)	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$