Exercice 2 5 points

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x^2-8\ln(x)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet qque f est dérivable sur $]0;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. On admet que, pour tout $x>0$, $f(x)=x^2\left(1-8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2(x^2-4)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0;+\infty[$.

5. Démontrer que sur l'intervalle $]0;2]$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

6. On admet que, sur l'intervalle $[2;+\infty[$ l'équation admet une unique solution β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0;+\infty[$ par :
$g_k(x)=x^2-8\ln(x)+k$.
En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive ou nulle sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

CORRECTION

Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $\mathrm{f}(x)=x^2-8\ln(2)$.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{f}(x)=+\infty$

2. $\mathrm{f}(x)=x^2\left(1-8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)=+\infty$.

3. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$ donc $\mathrm{f}'(x)=2x-8\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-8}{x}=\dfrac{2(x^2-4)}{x}$.

4. $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{2(x+2)(x-2)}{x}=\dfrac{2(x+2)}{x}\times(x-2)$

Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{2(x+2)}{x}>0$ donc le signe de $\mathrm{f}'(x)$ est le signe de (x-2).

Si $0<x<2$ alors $\mathrm{f}'(x)<0$ et f est décroissante strictement sur $]0\,;2[$.

Si $2<x$ alors $\mathrm{f}'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$.

$\mathrm{f}(2)=4-8\ln(2)$ est le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$.

Tableau de variations de f.

x	0		2		+∞
f '(x)		−	0	+	
f(x)	+∞	↘	4-8ln(2)	↗	+∞

5. f est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;2]$ à valeurs dans $[4-8\ln(2)\,;+\infty[$.

$4-8\ln(2)\simeq-1{,}55<0$ donc $0\in[4-8\ln(2)\,;+\infty[$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $\mathrm{f}(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]0:2]$.

6. f est dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ à valeurs dans $[4-8\ln(2)\,;+\infty[$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $\mathrm{f}(x)=0$ admet une unique solution β appartenant à $[2\,;+\infty[$.

x	0		α		2		β		+∞
f(x)	+∞	↘	0	↘	4-8ln(2)	↗	0	↗	+∞
Signe		+	0		−		0	+	

Si $0<x<\alpha$ alors $\mathrm{f}(x)>0$.

Si $\alpha<x\leqslant 2$ alors $\mathrm{f}(x)<0$.

Si $2\leqslant x<\beta$ alors $\mathrm{f}(x)<0$.

Si $\beta<x$ alors $\mathrm{f}(x)>0$.

7. Par lecture du tableau de variations de f , pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0:+\infty[$:

$\mathrm{f}(x)\geqslant 4-8\ln(2)$.

Donc $\mathrm{g}_k(x)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{k}\geqslant 4-8\ln(2)+\mathrm{k}$

$\mathrm{g}_k(x)\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4-8\ln(2)+\mathrm{k}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{k}\geqslant -4+8\ln(2)$.

La plus petite valeur de k pour laquelle g_k est positive ou nulle sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est :

$\mathrm{k}=-4+8\ln(2)$.