Exercice 3 — 5 points

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.
On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :
. 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
. 130 nouvelles questions sont ajoutées sur la FAQ.
Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.
Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentées sur la FAQ le n^ième^ mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :
$u_1=3$ et, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=0{,}9\,u_n+1{,}3$.

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n=13-\dfrac{100}{9}\times 0{,}9^n$.

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4. On considère le programme ci-dessous, écrit en langage Python.

```
def seuil(p):
  n=1
  u=3
  while u<=p:
    n=n+1
    u=0.9*u+1.3
  return n
```

Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8,5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ par : $v_n=9-6\times e^{-0{,}19\times(n-1)}$.
Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n^ième^ mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.

2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n>8{,}5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.
Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder au plus tôt à cette modification.

2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme.

CORRECTION

Partie A : première modélisation

1. $u_1=3$ (3 centaines)

$u_2=0,9\times u_1+1,3=0,9\times 3+1,3=2,7+1,3=4$

$u_3=0,9\times u_2+1,3=0,9\times 4+1,3=3,6+1,3=4,9$;

Au deuxième mois il y aura 400 questions sur la FAQ.
Au troisième mois il y aura 490 questions sur la FAQ.

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n=13-\frac{100}{9}\times 0,9^n$.

Initialisation

Pour $n=1$ $u_1=3$ et $13-\frac{100}{9}\times 0,9^1=13-\frac{90}{9}=13-10=3$.

Donc $u_1=13-\frac{100}{9}\times 0,9^1$ et la propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est vérifiée pour tout entier naturel n non nul, on suppose que $u_n=13-\frac{100}{9}\times 0,9^n$ et on doit démontrer que $u_{n+1}=13-\frac{100}{9}\times 0,9^{n+1}$.

Or $u_{n+1}=0,9\times u_n+1,3=0,9\times\left(13-\frac{100}{9}\times 0,9^n\right)+1,3=0,9\times 13-\frac{100}{9}\times 0,9^{n+1}+1,3=11,7+1,3-\frac{100}{9}\times 0,9^{n+1}$

$u_{n+1}=13-\frac{100}{9}\times 0,9^{n+1}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n non nul :

$u_n=13-\frac{100}{9}\times 0,9^n$

3. Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1}-u_n=13-\frac{100}{9}\times 0,9^{n+1}-\left(13-\frac{100}{9}\times 0,9^n\right)=\frac{100}{9}\times 0,9^n(-0,9+1)=0,1\times\frac{100}{9}\times 0,9^n>0$$

donc la suite (u_n) est croissante.

4. Le programme seuil(8,5) renvoie la plus petite valeur de l'entier naturel n vérifiant : $u_n>8,5$.

On résout : $u_n>8,5 \Leftrightarrow 13-\frac{100}{9}\times 0,9^n>8,5 \Leftrightarrow 13-8,5>\frac{100}{9}\times 0,9^n \Leftrightarrow 4,5>\frac{100}{9}\times 0,9^n$

$\Leftrightarrow 4,5\times\frac{9}{100}>0,9^n \Leftrightarrow \frac{40,5}{100}>0,9^n \Leftrightarrow 0,405>0,9^n$

(la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

$\Leftrightarrow \ln(0,405)>\ln(0,9^n) \Leftrightarrow \ln(0,405)>n\times\ln(0,9)$

($0<0,9<1$ donc $\ln(0,9)<0$)

$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,405)}{\ln(0,9)}<n$

Or $\frac{\ln(0,405)}{\ln(0,9)}\simeq 8,58$.

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n>0,85$ est 9.

Le programme seuil(8,5) renvoie 9.

Partie B : Une autre modélisation

1. $v_1=9-6\times e^0=3$
$v_2=9-6\times e^{-0,19}=4,04$ à 10^{-2} près.

2. $v_n>8,5 \Leftrightarrow 9-6\times e^{-0,19(n-1)}>8,5 \Leftrightarrow 9-8,5>6\times e^{-0,19\times(n-1)} \Leftrightarrow \frac{0,5}{6}>e^{-0,19\times(n-1)}$

$\ln\left(\frac{0,5}{6}\right)>-0,19\times(n-1) \Leftrightarrow \ln(0,5)-\ln(6)>-0,19\times(n-1) \Leftrightarrow \frac{\ln(0,5)-\ln(6)}{-0,19}<n-1$

$\Leftrightarrow 1-\frac{\ln(0,5)-\ln(6)}{0,19}<n$

Or $1-\frac{\ln(0,5)-\ln(6)}{0,19}\simeq 14,08$

Le plus petit entier naturel solution de l'inéquation $v_n>8,5$ est : 15.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. 850 est égal à 8,5 centaines.
La première modélisation conduit à la modification au bout de 9 mois.
La deuxième modélisation conduit à la modification au bout de 15 mois.
C'est la première modélisation qui conduit le plus tôt à cette modification.

2. Pour tout entier naturel n non nul, $e^{-0,19(n-1)}>0$ donc $v_n<9$.
Avec la deuxième modélisation il n'y aura pas à la FAQ un nombre de questions supérieur ou égal à 900.

$0<0,9<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0,9^n=0$ or $u_n=13-\frac{100}{9}\times 0,9^n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n=13$.

À log terme, il y aura un nombre de questions à la FAQ voisin (mais inférieur) à 1300 donc supérieur à 900.
La première modélisation conduit à un plus grand nombre de questions à la FAQ à long terme.

