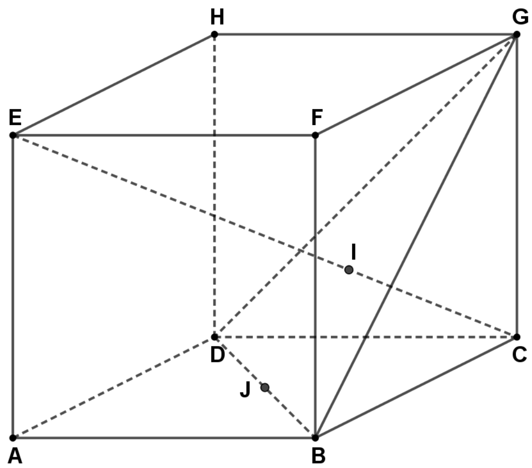
Exercice 4 — 5 points

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) et de la droite (EC).



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C et G.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

4.a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est :
$x+y-z-1=0$.

4.b. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

4.c. En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5.a. Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

5.b. Calculer l'aire du triangle BDG.
On pourra utiliser le point J, milieu du segment [BD].

6. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\frac{1}{3}Bh$ *où* B *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *la hauteur relative à cette base.*

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. $E(0;0;1)$ $C(1;1;0)$ $G(1;1,1)$.

2. La droite (EC) est la droite passant par E et de vecteur dir ecteur $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$$(EC): \begin{cases} x = t+0 \\ y = t+0 \\ z = -t+1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. (EC) est orthogonale au plan (GBD) si et seulement si $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GBD) par exemples $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BD}$.

$B(1;0;0)$ $D(0;1;0)$ $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{EC}=0\times1+1\times1+1\times(-1)=0+1-1=0$

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{EC}=-1\times1+1\times1+0\times(-1)=-1+1+0=0$

(EC) est donc orthogonale au plan (GBD).

4.a. Le plan (GBD) est le plan passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{EC}$.

$M(x;y;z)\in(GBD) \Leftrightarrow \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BM}=0$

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 1\times(x-1)+1\times(y-0)-1\times(z-0)=0 \Leftrightarrow x+y-z-1=0$

4.b. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection I du plan (BDG) et de la droite (EC), on résout le système : $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x=t \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases}$

On obtient $t+t-(-t+1)-1=0 \Leftrightarrow 3t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$.

Donc $x=\frac{2}{3}$; $y=\frac{2}{3}$ et $z=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$ et $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

4.c. La distance du point E au plan (GBD) est égale à EI.

$I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ $E(0;0;1)$

$EI^2=\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=12\times9=\frac{4\times3}{9} \Leftrightarrow EI=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5.a. [BD] ; [BG] ; [DG] sont trois diagonales de carrés de côté de longueur 1 donc :

$BD=BG=DG=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Le triangle GBD est un triangle équilatéral.

5.b. J est le milieu de [BD] donc $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ et $G(1;1;1)$.

$GJ^2=\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+(0-1)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{6}{4} \Leftrightarrow GJ=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(GJ) est la hauteur du triangle GBD issue de G donc l'aire du triangle GBD est égale à :

$\frac{1}{2}\times BD\times GJ=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (en unité d'aire).

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

6. EI est la hauteur du tétraèdre EGBD associée à la base GBD donc :

$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\times3}{2\times9}=\frac{1}{3}$ (en unité de volume).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés